МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЕКОНОМІКИ І ТЕХНОЛОГІЙ
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ ІНСТИТУТ
Кафедра електричної інженерії та автоматизації

«Елементи лінійної алгебри і аналітичної геометрії»

Конспект лекцій з курсу „Вища математика з елементами моделювання функціоналу технічних систем”

для здобувачів вищої освіти на першому (бакалаврському) рівні денної та заочної форм навчання всіх спеціальностей

РЕКОМЕНДОВАНО
на засіданні кафедри електричної інженерії та автоматизації
(протокол № 2 від 18.09.2025 р.)

ПОГОДЖЕНО
Науково-методичною радою Державного університету економіки і технологій
(протокол № 3 від «21»10.2025 р.)

м. Кривий Ріг
2025 р.

Конспект лекцій **«Елементи лінійної алгебри і аналітичної геометрії»** з курсу **„Вища математика з елементами моделювання функціоналу технічних систем”** для здобувачів вищої освіти на першому (бакалаврському) рівні денної та заочної форм навчання всіх спеціальностей. Державний університет економіки і технологій, Навчально-науковий технологічний інститут, кафедра електричної інженерії та автоматизації; уклад. В. ГРИГОР`ЄВА. Кривий Ріг, 2025. 31 с.

Укладач:	Вікторія ГРИГОР`ЄВА	доцент, к.т.н.

Відповідальний за випуск:	Вікторія ГРИГОР`ЄВА	доцент, к.т.н.

Конспект лекцій **«Елементи лінійної алгебри і аналітичної геометрії»** з освітнього компоненту «**Вища математика з елементами моделювання функціоналу технічних систем»** для здобувачів вищої освіти на першому (бакалаврському) рівні за спеціальністями G11 «Машинобудування»; G10 «Металургія»; G3 «Електрична інженерія»; G7 «Автоматизація, комп’ютерно-інтегровані технології та робототехніка»; G1 «Хімічні технології та інженерія»; G16 «Гірництво та нафтогазові технології» денної та заочної форм навчання розроблено у відповідності до навчального плану з метою надання здобувачам вищої освіти методичної допомоги у поглибленні знань і набутті практичних навичок.

З М І С Т

Розділ 1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ. В Е К Т О Р И

1.1. Визначники, їх обчислення. Системи лінійних рівнянь з трьома невідомими. Правило Крамера

Нехай маємо числа a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}. Таблиця, яка має вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

зветься *матрицею другого порядку*, числа a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} — її елементами, причому перший індекс у записі числа вказує на номер рядка, в якому стоїть цей елемент, а другий — на номер стовпця.

Число $\Delta = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$ називається *визначником матриці* (1) або *визначником другого* порядку і позначається

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix}.$$

Цілком аналогічно, розглядаючи таблицю вигляду

$$\begin{pmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{pmatrix}$$

де a_{ij}(i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3) — деякі числа, маємо *матрицю третього порядку*, визначник якої позначається

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix}, \qquad (2)$$

У цьому випадку число Δ знаходять за формулою

$$\Delta = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - a_{13}\, a_{23}\, a_{31} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33} \qquad (3)$$

Визначник третього порядку можна виразити через визначники другого порядку:

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} a_{23} \\ a_{32} a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} a_{23} \\ a_{31} a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{12} a_{22} \\ a_{31} a_{32} \end{vmatrix}. \qquad (4)$$

Основні властивості визначника

1. Величина визначника не зміниться, якщо рядки та стовпці його поміняти місцями, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} a_{21} a_{31} \\ a_{12} a_{22} a_{32} \\ a_{13} a_{23} a_{33} \end{vmatrix}.$$

2. Якщо у визначнику поміняти місцями лише два рядки або два стовпці, то знак визначника змінюється на протилежний.

3. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) помножити на число, то значення визначника також помножиться на те саме число. Звідси зрозуміло, що спільний множник всіх елементів рядка (стовпця) можна виносити за знак визначника.

4. Якщо визначник містить два пропорційних рядки (стовпці), то значення його дорівнює нулю. Отже, якщо елементи деякого рядка (стовпця) дорівнюють нулю, то і сам визначник дорівнює нулю.

5. Величина визначника не змінюється, якщо до елементів одного рядка (стовпця) додати елементи другого рядка (стовпця), помножені на те саме число.

Нехай задано систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3, \end{cases} \qquad (5)$$

де $a_{11},...,a_{33}$ — коефіцієнти при невідомих, b_1 b_2, b_3 — вільні члени. Назвемо визначником системи (5) число Δ, яке має вигляд (2) і обчислюється за правилом (3) або (4).

Тоді, знайшовши визначники
розв'язок системи(5) запишемо у вигляді

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 a_{12} a_{13} \\ b_2 a_{22} a_{23} \\ b_3 a_{32} a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} b_1 a_{13} \\ a_{21} b_2 a_{23} \\ a_{31} b_3 a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} b_1 \\ a_{21} a_{22} b_2 \\ a_{31} a_{32} b_3 \end{vmatrix},$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, z = \frac{\Delta_z}{\Delta}. \qquad (6)$$

Система (5) має єдиний розв'язок тоді і тільки тоді, коли визначник Δ системи відмінний від нуля. Тоді в цьому разі формули (6) називають *формулами Крамера*. Якщо Δ = 0, а Δ_x, Δ_y, Δ_z відмінні від нуля, то система (5) розв'язку не має. Якщо $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, то (5) має безліч розв'язків.

ПРИКЛАДИ

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ *б)* $\begin{vmatrix} -4 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & -3 & 6 \end{vmatrix}$

Розв′язок.

$$а)\begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 4 \cdot (-8) = 10 + 32 = 42.$$

$$б)\begin{vmatrix} -4 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -8 & -3 & 6 \end{vmatrix} = (-4) \cdot 2 \cdot 6 + 7 \cdot 0 \cdot (-8) + 0 \cdot (-3) \cdot 3 - 3 \cdot 2 \cdot (-8) -$$

$$-(-3) \cdot 0 \cdot (-4) - 0 \cdot 7 \cdot 6 = -48 + 48 = 0.$$

2. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 9, \\ x - 2y + z = -2, \\ 3x + 2y + 2z = 7. \end{cases}$$

Розв′язок.
Маємо

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&1&3\\1&-2&1\\3&2&2\end{vmatrix}=13,\ \Delta_x=\begin{vmatrix}9&1&3\\-2&-2&1\\7&2&2\end{vmatrix}=-13,\ \Delta_y=\begin{vmatrix}2&9&3\\1&-2&1\\3&7&2\end{vmatrix}=26,\ \Delta_z=\begin{vmatrix}2&1&9\\1&-2&-2\\3&2&7\end{vmatrix}=39.$$

Отже, $x = -1$, $y = 2$, $z = 3$.

1.2. Системи однорідних лінійних рівнянь. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гаусса

Система двох однорідних лінійних рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=0\end{cases}\qquad(1)$$

має розв'язки

$$x_1=k\begin{vmatrix}a_{12}a_{13}\\a_{22}a_{23}\end{vmatrix},x_2=-k\begin{vmatrix}a_{11}a_{13}\\a_{21}a_{23}\end{vmatrix},x_3=k\begin{vmatrix}a_{11}a_{12}\\a_{21}a_{22}\end{vmatrix}.$$

де k — довільне число.

Система трьох однорідних лінійних рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=0,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=0.\end{cases}$$

має ненульові розв'язки, якщо визначник системи

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}a_{12}a_{13}\\a_{21}a_{22}a_{23}\\a_{31}a_{32}a_{33}\end{vmatrix}=0.$$

Справедливе і обернене твердження.

Крім формул Крамера при розв'язуванні систем n лінійних рівнянь з n невідомими використовують також метод Гаусса. Нехай маємо систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3.\end{cases}\qquad(2)$$

Припустимо, що $a_{11}\neq 0$. Поділимо обидві частини першого рівняння системи на a_{11} і, помноживши одержане рівняння спочатку на a_{21}, а потім на a_{31}, віднімемо відповідно від другого і третього рівнянь системи. Дістанемо

$$(a_{22}-\frac{a_{12}}{a_{11}}a_{21})x_2+(a_{23}-\frac{a_{13}}{a_{11}}a_{21})x_3=b_2-\frac{b_1}{a_{11}}a_{21};$$

$$(a_{32}-\frac{a_{12}}{a_{11}}a_{31})x_2+(a_{33}-\frac{a_{13}}{a_{11}}a_{31})x_3=b_3-\frac{b_1}{a_{11}}a_{31};$$

Введемо позначення

$$a_{22}-\frac{a_{12}}{a_{11}}a_{21}=\bar{a}_{22};a_{23}-\frac{a_{13}}{a_{11}}a_{21}=\bar{a}_{23};b_2-\frac{b_1}{a_{11}}a_{21}=\bar{b}_2;$$

Дістанемо систему

$$\begin{cases} \bar{a}_{22}x_2 + \bar{a}_{23}x_3 = \bar{b}_2 \\ \bar{a}_{32}x_2 + \bar{a}_{33}x_3 = \bar{b}_3 \end{cases} \qquad (3)$$

$$a_{32} - \frac{a_{12}}{a_{11}}a_{31} = \bar{a}_{32};\ a_{33} - \frac{a_{13}}{a_{11}}a_{31} = \bar{a}_{33};\ b_3 - \frac{b_1}{a_{11}}a_{31} = \bar{b}_3;$$

Нехай $\bar{a}_{22} \neq 0$, тоді, поділивши обидві частини першого рівняння системи (3) на $\bar{a}_{22}$ та віднявши одержане рівняння, помножене на $\bar{a}_{32}$ від другого рівняння системи (3), матимемо

$$\left(\bar{a}_{33} - \frac{\bar{a}_{23}}{\bar{a}_{22}}\bar{a}_{32}\right)x_3 = \bar{b}_3 - \frac{\bar{b}_2}{\bar{a}_{22}}\bar{a}_{32}.$$

Позначивши $\bar{a}_{33} - \frac{\bar{a}_{23}}{\bar{a}_{22}}\bar{a}_{32} = a'_{33}$, $\bar{b}_3 - \frac{\bar{b}_2}{\bar{a}_{22}}\bar{a}_{32} = b'_3$, дістанемо

$$a'_{33}x_3 = b'_3.$$

У результаті зазначених операцій система рівнянь (2) набирає вигляду

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dfrac{a_{13}}{a_{11}}x_3 = \dfrac{b_1}{a_{11}}, \\ \qquad x_2 \dfrac{\bar{a}_{23}}{\bar{a}_{22}}x_3 = \dfrac{\bar{b}_2}{\bar{a}_{22}}, \\ \qquad\qquad x_3 = \dfrac{b'_3}{a'_{33}}. \end{cases} \qquad (4)$$

Визначення невідомих, починаючи з останнього, зрозуміле. Якщо ж $a_{11} = 0$, то серед коефіцієнтів при x_1(a_{21} або a_{31}) існує хоча б один відмінний від нуля. Рівняння, з коефіцієнтом відмінним від нуля при x_1, вважатимемо першим.

Назвемо таблицю, що складена з коефіцієнтів при невідомих та вільних членів системи, *розширеною матрицею* системи. Ця матриця має вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}b_1 \\ a_{21}a_{22}a_{23}b_2 \\ a_{31}a_{32}a_{33}b_3 \end{pmatrix}.$$

ПРИКЛАДИ

Методом Гаусса розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

Помножимо спочатку перше рівняння системи на —1 і додамо до другого, а потім помножимо перше рівняння системи на —2 і додамо до третього рівняння. Дістанемо

Тепер помножимо друге рівняння на 5 і додамо до третього рівняння, матимемо

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ \quad x_2 + x_3 = 1 \\ \quad -5x_2 - 7x_3 = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ \quad x_2 + x_3 = 1 \\ \quad -2x_3 = -4 \end{cases}$$

Зрозуміло, що x_3 = 2. З другого рівняння знаходимо x_2 = –1, тоді з першого рівняння x_1= 1.

1.3. Матриці. Дії над матрицями. Обернена матриця. Розв′язування систем лінійних рівнянь матричним способом.

Матрицею розміру $m\times n$ називається прямокутна таблиця із чисел

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn} \end{pmatrix}$$

Скорочено пишуть $A=(a_{ij})_{mn}$. Числа a_{ij} називаються ***елементами матриці.***

Нульовою називається матриця розміру m x n , всі елементи якої дорівнюють нулю.

Квадратною називається матриця, в якої число рядків дорівнює числу стовпців.

Діагональною називається матриця, в якої елементи головної діагоналі відмінні від нуля, а всі інші елементи дорівнюють нулю.

Зверніть також увагу на існування матриці-рядка

$$B=(b_1b_2..b_n)$$

і матриці-стовпця

$$C=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ . \\ . \\ c_n \end{pmatrix}$$

Добутком числа λ на матрицю $A=(a_{ij})_{mn}$ розміру m×n називається нова матриця $B=(b_{ij})_{mn}$ того ж розміру, кожний елемент якої дорівнює відповідному елементу матриці А, помноженному на число λ, тобто

$$B=\lambda A=A\lambda=\begin{pmatrix} \lambda a_{11}\lambda a_{12}...\lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21}\lambda a_{22}...\lambda a_{2n} \\ .... \\ \lambda a_{m1}\lambda a_{m2}...\lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Сумою двох матриць $A=(a_{ij})_{mn}$ і $B=(b_{ij})_{mn}$ розміру $m\times n$ називається матриця $C=(c_{ij})_{mn}$ того ж розміру, кожний елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів матриць-доданків.

Дії додавання, віднімання і множення матриць на число називаються *лінійними* діями над матрицями.

Добутком матриці $A=(a_{ij})_{mn}$ розміру $m\times n$ на матрицю $B=(b_{ij})_{nk}$ розміру n x k називається матриця $C=(c_{ij})_{mk}$ розміру $m\times k$, кожний елемент якої дорівнює сумі добутків елементів і-того рядка матриці А на відповідні елементи j-того стовпця матриці В, тобто

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+...+a_{in}b_{nj}.$$

Розглянемо квадратну матрицю А.

Обмежимось розглядом 3-х лінійних рівнянь

Запишемо такі матриці:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix},$$

де A – складена з коефіцієнтів при невідомих – матриця системи; B – матриця вільних членів; X – матриця невідомих. Знайдемо добуток

$$AX=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}x & a_{12}y & a_{13}z\\ a_{21}x & a_{22}y & a_{23}z\\ a_{31}x & a_{32}y & a_{33}z\end{pmatrix}.$$

Користуючись означенням рівності матриць, ми бачимо, що система ЛР(1) є не що інше, як рівність відповідних елементів матриць – стовпців AX і B. Тому початкова система (1) приймає форму матричного рівняння

$$AX = B. \qquad (2)$$

Для розв′язання останнього домножимо зліва рівняння (2) на обернену матрицю A^{-1}, вважаючи, що $\det A \neq 0$, отримаємо

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Але $A^{-1}A = E$, а $EX = X$, тоді розв′язок матричного рівняння (2) запишеться

$$X = A^{-1}B. \qquad (3)$$

Покажемо, що з формули (3) можна отримати формули Крамера. Дійсно, підставляючи в (3) вирази для A^{-1} і B, маємо

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11}b_1 & A_{21}b_2 & A_{31}b_3\\ A_{12}b_1 & A_{22}b_2 & A_{32}b_3\\ A_{13}b_1 & A_{23}b_2 & A_{33}b_3\end{pmatrix}$$

З теоремою про заміщення кожний елемент останньої матриці дорівнює значенням допоміжних визначників Δ_x, Δ_y, Δ_z, які були введені при розв′язуванні систем за формулами Крамера. Тому далі маємо

$$X=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \Delta_x\\ \Delta_y\\ \Delta_z\end{pmatrix}\Rightarrow x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta},\ z=\frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

Звернемо увагу на те, що в формулі (3) співмножник A^{-1}залежить тільки від коефіцієнтів при невідомих, а B – тільки від вільних членів. Тому, коли приходиться розв′язувати системи вигляду (1) з однаковими членами, то в таких випадках матричний розв′язок (3) стає зручнішим: обернену матрицю A^{-1} знаходимо тільки один раз і перемножуємо на нову матрицю B. В той же час, як за формулами Крамера прийшлося б заново обчислювати допоміжні визначники Δ_x, Δ_y, Δ_z,відповідно до кожного нового набору вільних членів.

Приклад. Розв′язати систему рівнянь матричним способом

$$\begin{cases} 2x - y = 6,\\ -x + 3y + 4z = 12,\\ 5x + 4y + 2z = 20.\end{cases}$$

Складемо матрицю системи

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0\\ -1 & 3 & 4\\ 5 & 4 & 2\end{pmatrix}.$$

Для цієї матриці раніше ми знайшли $det\,A=2 \neq 0$ і обернену матрицю

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 \\ 11 & 2 & -4 \\ -9{,}5 & -6{,}5 & 3{,}5 \end{pmatrix}$$

Тому згідно (3) маємо

$$X = A^{-1}B=\begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 \\ 11 & 2 & -4 \\ -9{,}6 & -6{,}5 & 3{,}5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 20 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -30-12+40 \\ 66+24-80 \\ -3-18+70 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Отже, $x = -2$, $y = 10$, $z = 5$.

Пропонуємо перевірити матрицю.

Зауваження.

1. Розглянутий матричний спосіб на прикладі лінійних систем третього порядку узагальнюється на системі вищих порядків.
2. В більш загальних випадках в матричних рівняннях

$$AX = B$$

матриці X і B можуть мати інші розміри і бути не тільки матрицями стовпцями.

3. При розв′язуванні матричних рівнянь вигляду

$$XA = B$$

помножують на обернену матрицю A^{-1} справа, тобто

$$XA = BA^{-1}$$

ПРИКЛАДИ

1. Розв′язати матричним способом рівняння

$$\begin{cases} -2x-2y-z=3, \\ 3x+4y-5z=1, \\ -5x-4y+3z=-15. \end{cases}$$

Відповідь: (4; 1; 3).

Розв′язати матричні рівняння

2 $.\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. *Відповідь*: $\begin{cases} x=27,\ y=-7, \\ z=-10, t=3. \end{cases}$

3. $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. *Відповідь*: $\begin{cases} x=16,\ y=-10, \\ z=140, t=-11. \end{cases}$

1.4. Системи координат на прямій, на площині, в просторі. Поділ відрізка

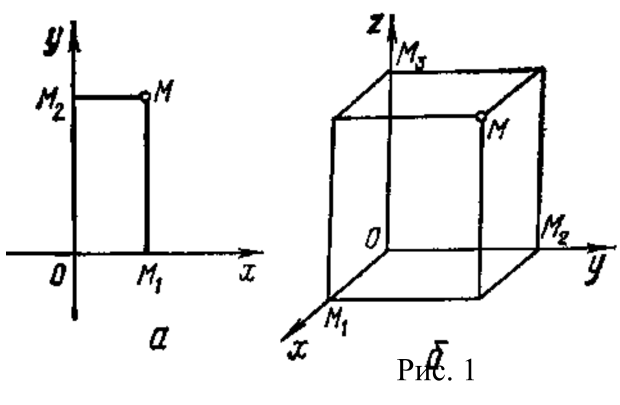

Рис. 1

Система координат на площині зветься прямокутною декартовою (рис.1, *а*), якщо осі Ox і Oy взаємно перпендикулярні і мають однакові масштабні одиниці. Якщо спроектуємо точку M на осі Ox і Oy, то M має на осі Ox координату x (абсцису), а на осі Oy координату y (ординату).

Відстань від точки M_1 (x_1; y_1) до точки M_2 (x_2; y_2) знайдемо за формулою

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \qquad (1)$$

Цілком аналогічно у просторі, проектуючи точку M на взаємно перпендикулярні осі Ox, Oy і Oz, що мають однакові масштабні одиниці, маємо відповідно абсцису, ординату та аплікату точки M (рис.1, *б*). Відстань між точками M_1 (x_1; y_1; z_1) і M_2 (x_2; y_2; z_2) визначається за формулою

Якщо відрізок M_1M_2 поділяється точкою M у відношенні t, то координати точки M (x; y; z) так виражаються через координати точок M_1 (x_1; y_1; z_1) і M_2 (x_2; y_2; z_2):

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (2)$$

$$x = \frac{x_1 + tx_2}{1+t}, \quad y = \frac{y_1 + ty_2}{1+t}, \quad z = \frac{z_1 + tz_2}{1+t} \qquad (3)$$

Зрозуміло, що коли M – середина відрізка M_1M_2, то її координати

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2} \qquad (4)$$

ПРИКЛАДИ

1. Побудувати в прямокутній декартовій системі координат точки, задані своїми координатами: $M(3; -1; 4)$, $N(-4; 5; 0)$.

Розв′язок.

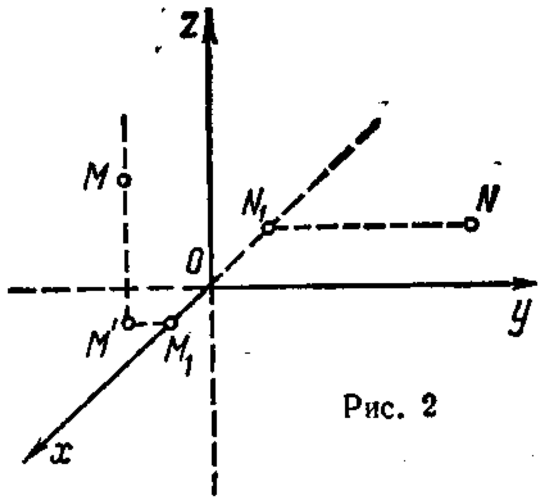

Рис. 2

Для побудови точки M відкладаємо в додатному напрямі осі Ox (абсциса точки M додатна) відрізок OM_1, довжина якого 3 одиниці (рис.2). Від точки M_1 відкладаємо паралельно осі Oy у від′ємному її напрямі (ордината точки M від′ємна) відрізок M_1M', довжина якого 1 одиниця. Від точки M' відкладаємо паралельні осі Oz в додатному її напрямі відрізок $M'M$, довжина якого 4 одиниці. Точка M – шукана.

На цьому ж рисунку аналогічно виконуємо побудову точки N (–4; 5; 0).

1.5. Полярна система координат. Перехід від полярних координат до декартових і від декартових до полярних.

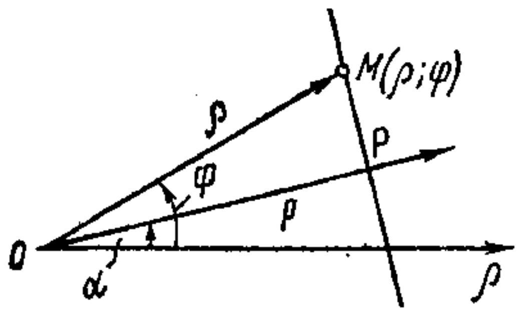

Рис. 3

Полярна система координат визна-чається наявністю точки O (полюса) і полярної осі з початком у точці O. Положення точки M у полярній системі координат визначається довжиною радіуса-вектора ρ і полярним кутом φ, утвореним радіусом-вектором з полярною віссю (рис. 3).

Числа ρ і φ називають *координатами* точки M і записують M (ρ; φ). Відстань між двома точками M_1 (ρ_1; φ_1) і M_2 (ρ_2; φ_2) визначається за формулою

Формули переходу від полярних до

$$d = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}. \qquad (1)$$

декартових координат мають вигляд

$$x = \rho \cos\varphi, \qquad y = \rho \sin \varphi. \qquad (2)$$

Формули переходу від декартових до полярних координат записуються таким чином:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y_2}, \ tg\varphi = \frac{y}{x}. \qquad (3)$$

ПРИКЛАДИ

1. Знайти: *а)* прямокутні декартові координати точки $N\left(2; \frac{2\pi}{3}\right)$, якщо полюс збігається з початком координат, а полярна вісь з віссю абсцис; *б)* полярні координати точки F (1, –1), якщо початок прямокутної системи координат збігається з полюсом, а вісь абсцис з полярною віссю.

Розв′язок.

а) Згідно з формулою (2), маємо

$$x = 2\cos\frac{2\pi}{3} = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1;$$

$$y = 2\sin\frac{2\pi}{3} = 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Таким чином, N (–1; √3).

б) Згідно з формулою (3) маємо

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \ tg\varphi = \frac{-1}{1} = -1.$$

За знаками x і y визначаємо, що точка F розміщена в четвертому квадранті, отже, $\varphi = \frac{7\pi}{4}$. Таким чином, $F\left(\sqrt{2}; \frac{7\pi}{4}\right)$.

2. У полярній системі координат задано протилежні вершини квадрата: $A\left(2\sqrt{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$ і $C\left(\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}\right)$. Визначити площу квадрата.

Розв′язок.

Знайдемо діагональ AC:

$$AC = \sqrt{8 + 2 - 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

Тоді площа квадрата

$$S = \frac{1}{2}AC^2 = 9 \ кв.од.$$

1.6. Лінійні операції над векторами. Координати вектора. Довжина вектора. Скалярний добуток двох векторів

Будемо називати вектором напрямлений прямолінійний відрізок. Довжину відрізка, який зображує вектор, називають *модулем* або *довжиною вектора*. Якщо модуль вектора дорівнює нулю, то вектор буде *нульовим* і напрям його невизначений.

Вектори, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих, називають *колінеарними*. Якщо ж до цього вони мають однаковий напрям, то їх називають *співнапрямленими*. Колінеарні вектори, що мають протилежні напрями, називають *протилежно напрямленими*. Вектори, що лежать в одній або в паралельних площинах, називають *компланарними.* Якщо вектори співнапрямлені і мають однакові модулі, то такі вектори називають *рівними.* Якщо вектори мають однакові модулі, але протилежно напрямлені, то їх називають *протилежними*.

Сумою n векторів, розміщених послідовно (тобто кінець першого вектора є початком другого), називають вектор, який сполучає початок першого вектор-доданка з кінцем останнього вектор-доданка. Якщо два вектори мають спільний початок, то для знаходження суми таких двох векторів необхідно побудувати на них паралелограм. Вектор, який збігається з діагоналлю побудованого паралелограма, що має спільний початок із заданими векторами, буде сумою цих векторів. Це правило додавання двох неколінеарних векторів називають *правилом паралелограма*.

Різницею $\vec{a}-\vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають такий третій вектор $\vec{c}$, який треба додати до вектора $\vec{b}$, щоб дістати вектор $\vec{a}$, отже, $\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}$, якщо $\vec{b}+\vec{c}=\vec{b}$. Неважко зрозуміти, що для того, щоб від вектора $\vec{a}$ відняти вектор $\vec{b}$, досить до вектора $\vec{a}$ додати вектор $-\vec{b}$.

Добутком вектора $\vec{a}$ на дійсне число (скаляр) t називають такий вектор $\vec{b}$, модуль якого дорівнює $t\cdot|\vec{a}|$ і який колінеарний з вектором $\vec{a}$ і однаково напрямлений з ним при $t>0$ та протилежно напрямлений при $t<0$ і є нуль-вектором при $t=0$.

Розділити вектор $\vec{a}$ на дійсне число $t\neq 0$ означає помножити вектор $\vec{a}$ на число $\frac{1}{t}$, тобто $\frac{\vec{a}}{t}=\vec{a}\cdot\frac{1}{t}$.

Одиничним вектором вектора (або *ортом вектора*) називають вектор, довжина якого дорівнює 1 і який співнапрямлений з даним вектором. Очевидно, щоб знайти одиничний вектор заданого вектора, потрібно поділити вектор на його довжину.

Якщо маємо вектор у системі координат, то це означає, що задано його координати, тобто алгебраїчні проекції вектора на відповідні осі координат. Нехай маємо прямокутну декартову систему координат у просторі. Координати вектора $\bar{a}$ позначимо через x,y,z. Тоді будемо записувати $\vec{a}=(x, y, z)$. Очевидно, що

$$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}, \tag{1}$$

де $\vec{i}$, $\vec{j}, \vec{k}$ — одиничні вектори, взяті відповідно за осями координат. Зауважимо, що трійка векторів $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ утворює координатний базис, якщо вектор $\vec{i}$ належить осі Ox, вектор $\vec{j}$ – осі Oy, вектор $\vec{k}$ — осі Oz. Кожен з векторів $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ має напрям, що збігається з додатним напрямом відповідної осі, якій він належить. Подання вектора $\vec{a}$ у вигляді (1) є розкладом вектора $\vec{a}$ за координатним базисом $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$.

Якщо вектор $\vec{a}$ має координати x, y, z, то його модуль визначається за формулою

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \tag{2}$$

тоді орт вектора $\vec{a}$ позначимо через $\vec{a}_0$ і, отже,

$$\vec{a}_0=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right). \tag{3}$$

Якщо маємо дві точки A (x_1, y_1, z_1) і В (x_2, y_2, z_2) , то координати вектора $\overrightarrow{AB}$ записуємо в такий спосіб

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1). \tag{4}$$

Нехай задано вектори $\vec{a}_1=(x_1,y_1,z_1),\ldots,\vec{a}_n=(x_n,y_n,z_n)$. Тоді в координатній формі маємо

$$\vec{a}=\vec{a}_1+\ldots+\vec{a}_n=(x_1+\ldots+x_n,y_1+\ldots+y_n,z_1+\ldots+z_n)$$

$$\vec{c}=\lambda_1\vec{a}_1+\ldots+\lambda_n\vec{a}_n=(\lambda_1x_1+\ldots+\lambda_nx_n,\lambda y_1+\ldots+\lambda_ny_n,\lambda_1z_1+\ldots+\lambda_nz_n) \qquad (5)$$

Якщо вектори колінеарні, то їх координати пропорційні. Усе вище сказане має місце для координатної прямої та площини.

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають число $(\vec{a},\vec{b})$, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними, і записують

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=|\vec{a}|\,\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a}\,{}^\wedge\vec{b}\right) \qquad (6)$$

або $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=|\vec{a}|\,\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}=\left|\vec{b}\right|\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$,

де $\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}$ – проекція вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$.

Скалярний добуток $(\vec{a},\vec{a})$ називають *скалярним квадратом* вектора $\vec{a}$, він дорівнює квадрату модуля вектора $\vec{a}$:

$$(\vec{a},\vec{a})=\vec{a}^{\,2}=|\vec{a}|^2.$$

Якщо вектори задано своїми координатами, тобто $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1),\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$, то

$$(\vec{a},\vec{b})=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 \qquad (7)$$

Очевидно, що

$$\cos\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)=\frac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|}$$

або

$$\cos(\vec{a}\wedge\vec{b})=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}. \qquad (8)$$

Напрямними кутами вектора $\vec{a}$ називають кути, які він утворює з координатними осями, а косинуси напрямних кутів називають *напрямними косинусами* і записують

$$\cos(\vec{a}\,{}^\wedge\vec{i})=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \cos(\vec{a}\,{}^\wedge\vec{j})=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\cos\left(\vec{a},{}^\wedge\vec{k}\right)=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad (9)$$

де $\vec{a}=(x, y, z)$, $\vec{i}=(1, 0, 0)$, $\vec{j}=(0, 1, 1)$, $\vec{k}=(0, 0, 1)$.

Якщо під дією сили $\vec{F}$ - точка переміщується з положення B в положення C, то виконана при цьому робота A чисельно буде визначатися скалярним добутком вектора сили $\vec{F}$ і вектора переміщення $\overrightarrow{BC}$ отже,

$$A=\left(\vec{F},\overrightarrow{BC}\right)=|\vec{F}\,||\,\overrightarrow{BC}\,|\cos\left(\vec{F}\,{}^\wedge\overrightarrow{BC}\right) \qquad (10)$$

ПРИКЛАДИ

1. Вектор $\vec{c}$ задано координатами своїх кінців M (4; 2; –1) і N (0; 3; 1). Знайти проекції вектора $\vec{c}$ на осі координат і його напрямні косинуси.

Зрозуміло, що проекціями вектора $\bar{c}$ на осі координат є координати вектора $\bar{c}$, тобто $c_x = 0 – 4 = –4$; $c_y = 3 – 2=1$, $c_z, = 1 + 1=2$.

Тоді $\left|\vec{c}\right|=\sqrt{(-4)^2+1^2+2^2}=\sqrt{21}$ і напрямні коминуси визначаємо за формулами (9)

$$\cos\left(\vec{c},{}^\wedge\vec{i}\right)=-\frac{4}{\sqrt{21}},\cos\left(\vec{c},{}^\wedge\vec{j}\right)=\frac{1}{\sqrt{21}},\cos\left(\vec{c},{}^\wedge\vec{k}\right)=\frac{2}{\sqrt{21}}.$$

2. Обчислити $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$, якщо відомо, що $|\vec{a}|=7$, $\left|\vec{b}\right|=9$, а кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ становить 30°.

Використовуючи властивість скалярного квадрата вектора, маємо

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\overrightarrow{a^2}+2\left(\vec{a},\vec{b}\right)+\overrightarrow{b^2}=\overrightarrow{a^2}+2\,|\vec{a}\,|\,|\vec{b}\,|\cos\left(\vec{a}\,{}^\wedge\vec{b}\right)+\overrightarrow{b^2}=$$

$$=49\cdot 2\cdot 7\cdot 9\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+81=130+63\sqrt{3},$$

$$|\vec{a}+\vec{b}\,|=\sqrt{130+63\sqrt{3}.}$$

3. На точку діють три сили: $\vec{F}_1=(3,\ 2,\ 6)$, $\vec{F}_2=(1,\ -3,\ 2)$ і $\vec{F}_3=(-5,\ 2,\ 7)$. Знайти величину і напрям рівнодійної сили та роботу, яка виконується при переміщенні точки, що рухається прямолінійно, з положення К (0; 2; 4) в положення M (7; 8; 9).

Оскільки рівнодійна трьох сил $\vec{F}=\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}$, то за формулою із (5) маємо $\vec{F}=(-1,\ 1,\ 15)$. Тоді, користуючись формулою (2), знайдемо величину равнодійної

$$|\vec{F}\,|=\sqrt{(-1)^2+1^2+15^2}=\sqrt{227}.$$

Напрямні косинуси рівнодійної відповідно дорівнюватимуть:

$$\cos\left(\vec{F},{}^\wedge\,\overrightarrow{Ox}\right)=-\frac{1}{\sqrt{227}},\ \cos\left(\vec{F},{}^\wedge\,\overrightarrow{Oy}\right)=\frac{1}{\sqrt{227}},\ \cos\left(\vec{F},{}^\wedge\,\overrightarrow{Oz}\right)=\frac{15}{\sqrt{227}}.$$

Оскільки $\overrightarrow{KM}=(7,\ 6,\ 5)$, то, згідно з формулою (10), робота

$$А=(\vec{F},\ \overrightarrow{KM})=(-1)\cdot 7+1\cdot 6+15\cdot 5=74.$$

1.7. Векторний добуток двох векторів. Площа трикутника. Мішаний добуток трьох векторів. Об′єм тетраедра

Векторним добутком $\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]\left(\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0}\right)$ є такий вектор $\vec{c}$, який перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, утворює з ними праву трійку векторів і модуль якого визначається за формулою:

$$|\vec{c}\,|=|\vec{a}\,|\,|\vec{b}\,|\sin\left(\vec{a},{}^\wedge\,\vec{b}\right). \qquad (1)$$

Зауважимо, що $[\vec{a}\times\vec{b}\,]=-[\vec{b}\times\vec{a}\,]$, а модуль векторного добутку дорівнює площі паралелограма, побудованого на $\vec{a}$ і $\vec{b}$, віднесених до спільного початку, тобто площа трикутника ABC, у якого $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\ \overrightarrow{AC}=\vec{b}$, може бути визначена таким чином:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\,|[\vec{a}\times\vec{b}]\,|. \qquad (2)$$

У координатній формі векторний добуток векторів $\vec{a}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$ і $\vec{b}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$ можна записати у вигляді

$$\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\vec{k} \qquad (3)$$

Якщо $\vec{F}$ є вектор сили, прикладеної до деякої точки B, а вектор $\overrightarrow{AB}$ напрямлений з точки A в точку B, то векторний добуток $[\overrightarrow{AB},\vec{F}\,]$ буде моментом $\vec{M}$ сили $\vec{F}$ відносно точки A.

Мішаним або *скалярно-векторним добутком* трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називається векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, скалярно помножений на вектор $\vec{c}$, тобто

$$[\vec{a}\times\vec{b}]\vec{c} \text{ або } (\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}).$$

Чисельно мішаний добуток $(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})$ дорівнює об′єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Якщо вектори компланарні, їх мішаний добуток дорівнює нулю. Для мішаного добутку справедливі рівности

$$(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) = (\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}) = (\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}) = -(\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a}) = -(\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b}) = -(\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c}).$$

У координатній формі мішаний добуток векторів $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$ має вигляд

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (4)$$

Якщо маємо тетраедр, заданий вершинами A (x_1, y_1, z_1), $B = (x_2, y_2, z_2)$, $C = (x_3, y_3, z_3)$,

$$V = \frac{1}{6}\left\| \begin{matrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{matrix} \right\|. \qquad (5)$$

$D = (x_4, y_4, z_4)$, то його об′єм визначається за формулою:

ПРИКЛАДИ

1. Трикутник задано вершинами A (1; –1; 2), B (5; –6; 2), C (1; 3; –1). Обчислити довжину висоти, опущеної з вершини B на сторону AC.

Знаходимо вектори $\overrightarrow{AB}$ = (4; –5; 0) і $\overrightarrow{AC}$ = (0, 4, –3), тоді, згідно з формулами (2) і (3) дістанемо

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{15^2 + 12^2 + 16^2} = \frac{25}{2} \textit{ кв.од.}$$

Крім того, $S = \dfrac{AC \cdot h}{2}$, тобто $h = \dfrac{2S}{AC}$. Отже, знаходячи $AC = \sqrt{16+9} = 5$, маємо

$$h = \frac{2\cdot 25}{2\cdot 5} = 5 \textit{ лін.од.}$$

2. До точки A (4; 2; –3) прикладено дві сили $\vec{F}_1$ = (–1, 3, –1) і $\vec{F}_2$ = (3, –1, 10). Знайти момент рівнодійної цих сил, його величину та напрямні косинуси відносно точки B (2; 4; 0).

Знайдемо рівнодійну заданих сил $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ = (2, 2, 9) і вектор $\overrightarrow{AB}$ =(–2, 2, 3). Згідно з сказаним вище, момент сили знаходимо за формулою

$$\overrightarrow{M} = [\overrightarrow{AB}, \vec{F}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 9 \end{vmatrix} = (12, 24, -8)$$

$$\left|\overrightarrow{M}\right| = \sqrt{12^2 + 24^2 + (-8)^2} = 28.$$

Напрямні косинуси вектора момента сили відповідно дорівнюватимуть

$$cos\left(\overrightarrow{M}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{Ox}\right) = \frac{12}{28}, \qquad cos\left(\overrightarrow{M}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{Oy}\right) = \frac{24}{28}, \qquad cos\left(\overrightarrow{M}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{Oz}\right) = -\frac{8}{28},$$

$$cos\left(\overrightarrow{M}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{Ox}\right) \approx 0{,}4285,\; cos\left(\overrightarrow{M}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{Oy}\right) \approx 0{,}8571,\; cos\left(\overrightarrow{M}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{Oz}\right) \approx -0{,}2857.$$

Розділ 2. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

2.1. Рівняння прямої, що проходить через задану точку або дві задані точки. Рівняння прямої у відрізках на осях. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Кут між прямими

Нехай на площині в прямокутній декартовій системі координат маємо пряму l, тоді:

а) якщо пряма проходить через фіксовану точку M_0 (x_0; y_0) і паралельна деякому заданому вектору $\vec{s} = (m, n)$, то її рівняння має вигляд

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}; \tag{1}$$

б) якщо пряма проходить через дві задані точки M_1 (x_1, y_1), M_2 (x_2; y_2), то її рівняння має вигляд

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}; \tag{2}$$

в) якщо пряма відтинає на осях координат відрізки a (на осі Ox) і b (на осі Oy), то рівняння прямої записується так:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \tag{3}$$

Пучком прямих, називають множину прямих, які проходять через деяку точку — центр пучка. Рівняння пучка прямих з центром у точці M_0 (x_0; y_0) записується у вигляді

$$y - y_0 = k\,(x - x_0), \tag{4}$$

де k – кутовий коефіцієнт прямої пучка, який дорівнює тангенсу кута a (кут нахилу прямої до осі Ox), тобто

$$k = tg\ \alpha. \tag{5}$$

Якщо k фіксоване, то (4) — рівняння прямої, що проходить через точку M_0 з заданим кутовим коефіцієнтом k. Якщо ж пряма відтинає на осі Oy відрізок, що дорівнює $|b|$, то рівняння прямої має вигляд

$$y = kx + b \tag{6}$$

Якщо прямі l_1 і l_2 мають напрямними відповідно вектори $\vec{s}_1 = (m_1, n_1)$ і $\vec{s}_2 = (m_2, n_2)$, то кутом між прямими l_1 і l_2 буде кут між векторами $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$, отже,

$$cos\left(\overrightarrow{l_1}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{l_2}\right) = cos\left(\overrightarrow{s_1}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{s_2}\right) = \frac{(\overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2})}{\left|\overrightarrow{s_1}\right|\left|\overrightarrow{s_2}\right|} = \pm\frac{m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2 + n_2^2}} \tag{7}$$

(знаки «+» або «—» визначають кожен з суміжних кутів, утворених в результаті перетину прямих). Умовою паралельності l_1 і l_2 з напрямними векторами $\vec{s}_1 = (m_1, n_1)$ і $\vec{s}_2 = (m_2, n_2)$ є $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$, а умовою перпендикулярності є рівність $m_1m_2 + n_1n_2 = 0$. Якщо k_1 і k_2 — кутові коефіцієнти l_1 і l_2, то кут α між ними знаходиться за формулою

$$tg\alpha = \pm\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \tag{8}$$

(два знаки відповідають двом різним положенням однієї прямої відносно іншої).

ПРИКЛАДИ

1. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку P (4; 3) паралельно прямій $y = 3x - 2$.

З умови паралельності прямих кутовий коефіцієнт шуканої прямої дорівнює кутовому коефіцієнту заданої прямої, тобто дорівнює 3. Отже, використавши рівняння (4) і підставивши в нього $k = 3$, $x_0 = 4$, $y_0 = 3$, дістанем рівняння шуканої прямої:

$$3x - y - 9 = 0.$$

2. Скласти рівняння прямих, що проходять через точку M_0 (3; 3) під кутом 45° до прямої $3x + 4y + 6 = 0$.

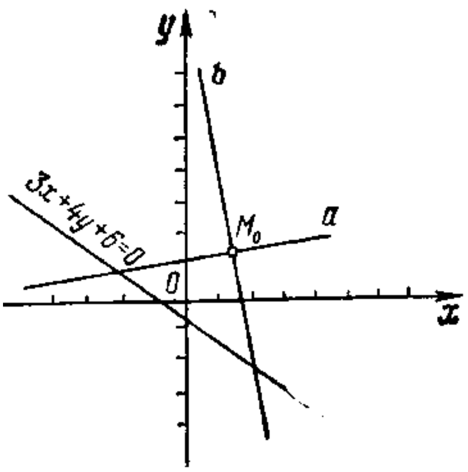

Рис. 4

Визначимо кутові коефіцієнти шуканих прямих a і b (рис. 4). Для цього позначимо через k_1 і k_2 відповідно кутові коефіцієнти прямих a і b, а через k кутовий коефіцієнт заданої прямої, який дорівнює $-\frac{3}{4}$.

Оскільки пряма a утворює з заданою прямою кут 45°, дістанемо

$$tg45^{o} = \frac{k_1 - \left(-\frac{3}{4}\right)}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)k_1}$$

(в чисельнику дробу ми віднімаємо кутовий коефіцієнт заданої прямої тому, що її треба повернути проти годинникової стрілки до збіжності з прямою a). Тобто маємо

$$1 = \frac{k_1 + \frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}k_1}, \qquad \text{звідки} \quad k_1 = \frac{1}{7}.$$

Аналогічно знаходимо $k_2 = -7$. Тоді рівняння прямих a і b можна записати відповідно у вигляді

$$7y - x - 18 = 0, \quad y + 7x - 24 = 0.$$

Часто на практиці користуються полярним рівнянням прямої (див. рис. 3). У полярній системі координат проводимо нормаль до прямої з полюса. Нехай P — точка перетину її з прямою, $OP = p$, кут між полярною віссю та нормаллю дорівнює α, тоді полярне рівняння прямої має вигляд:

$$\rho = \frac{p}{cos(\varphi - \alpha)}.$$

2.2. Загальне рівняння прямої. Нормальне рівняння прямої. Зведення загального рівняння прямої до нормального вигляду. Відхилення і відстань точки від прямої

Загальне рівняння прямої має вигляд

$$Ax + By + C = 0 \qquad (1)$$

(A, B, C — сталі коефіцієнти, $A^2 + B^2 \neq 0$, A і B — координати нормального вектора прямої). Рівняння прямої, що проходить через задану точку M_0 (x_0, y_0), записується таким чином:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \qquad (2)$$

Нормальне рівняння прямої має вигляд

$$x\ cos\ \alpha + y\ sin\ \alpha - p = 0, \quad (3)$$

де α – кут кут між нормаллю до прямої та додатним напрямом осі *Ox, p* — довжина відрізка нормалі, проведеної з початку координат до прямої, *x* і *y* — координати біжучої точки прямої. У нормальному рівнянні прямої вільний член завжди від'ємний, а сума квадратів коефіцієнтів при *x* і *y* дорівнює одиниці.

Щоб звести рівняння (1) до вигляду (3), необхідно обидві частини (1) помножити на нормуючий множник $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0$, знак якого вибираємо протилежним знаку вільного члена (1). Тоді *зведене загальне рівняння* матиме вигляд

$$\pm\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0 \quad (4)$$

Відхиленням точки M_0 від прямої *l* називається додатне число δ = *d*, якщо точка M_0 і початок координат лежать по один бік від прямої *l*, і від'ємне число δ = —*d*, якщо вони лежать по різні боки від *l*. Щоб знайти δ, потрібно в нормальне рівняння прямої *l* підставити координати точки M_0. Отже,

$$\delta = x_0\ cos\alpha + y_0\ sin\alpha - p \quad \text{або} \quad \delta = \pm\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}. \quad (5)$$

Число $d = |\,\delta\,|$ називається *відстанню* точки M_0 від прямої *l*.

Розглядаючи рівняння (1), ми визначили нормальний вектор $\vec{n}$ = (A, B) прямої *l*. У той же час, використовуючи вимогу ортогональності векторів, можна визначити і напрямний вектор $\vec{s}$ прямої *l*, тобто $\vec{s}$ = (B, –A).

ПРИКЛАДИ

1. Загальне рівняння прямої 7*x* — 2*y* + 1 = 0 подати як рівняння: а) з кутовим коефіцієнтом; б) у відрізках на осях; в) у нормальному вигляді.

а) Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом має вигляд (6), п.2.1. Отже, задане рівняння перепишемо у вигляді

$$y = \frac{7}{2}x + \frac{1}{2}.$$

б)У відрізках на осях рівняння прямої має вигляд (3), п.2.1. Отже, перенесемо вільний член даного рівняння у праву частину і одержане рівняння перепишемо у вигляді

в) Щоб звести задане рівняння до нормального вигляду, необхідно обидві частини

$$\frac{x}{-\frac{1}{7}} + \frac{y}{\frac{1}{2}} = 1.$$

рівняння помножити на нормуючий множник, вибираючи для нього знак, протилежний до знака вільного члена в загальному рівнянні прямої. Отже, для наведеного прикладу маємо нормуючий множник

$$M = -\frac{1}{\sqrt{49+4}} = -\frac{1}{\sqrt{53}}.$$

Тоді шукане нормальне рівняння прямої, заданої загальним рівнянням, матиме вигляд

$$-\frac{7}{\sqrt{53}}x + \frac{2}{\sqrt{53}}y - \frac{1}{\sqrt{53}} = 0.$$

2.3. Криві другого порядку та їх канонічні рівняння

Еліпсом є множина точок площини, сума відстаней яких від двох фіксованих точок (фокусів) є величина стала і дорівнює $2a$. Позначимо відстань між фокусами F_1 і F_2 через $2c$. Віднесемо еліпс до прямокутної декартовоі системи координат (рис. 5), позначаючи біжучу точку еліпса як $M\ (x;\ y)$, відрізок A_1A_2 — великою віссю, довжина якої $2a$, відрізок B_1B_2 — малою віссю, довжина якої $2b$. Тоді рівняння еліпса має вигляд

Це рівняння називають *канонічним рівнянням еліпса*.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \left(b^2=a^2-c^2\right) \tag{1}$$

Ексцентриситетом еліпса назвемо величину $e=\dfrac{c}{a}$, яка менша за одиницю.

Фокальні радіуси $F_1M = r_1$ і $F_2M = r_2$ довільної точки M ($x;\ y$) визначаються за формулами

$$r_1 = a - \text{e}x, \qquad r_2 = a + \text{e}x$$

Прямі, перпендикулярні до фокальної осі F_1F_2 симетричні відносно центра еліпса на відстані $\dfrac{a}{\text{e}}$ від нього, називаються *директрисами еліпса*. Їх рівняння

$$x=\pm\frac{a}{\text{e}}.$$

Відношення фокальних радіусів до відстаней точки від відповідних директрис дорівнює ексцентриситету еліпса, тобто

$$\frac{r_1}{d_1}=\frac{r_2}{d_2}=\text{e}. \tag{2}$$

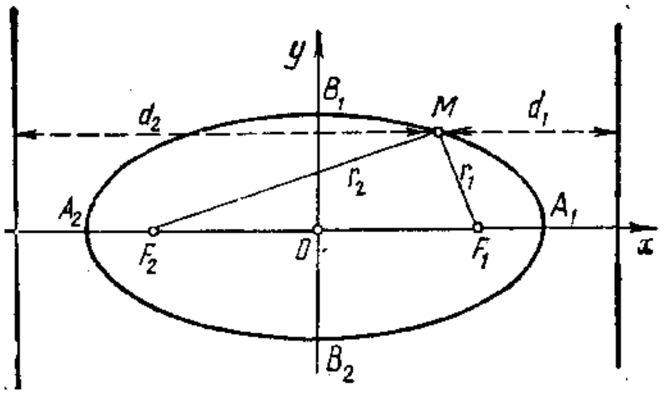

Рис. 5

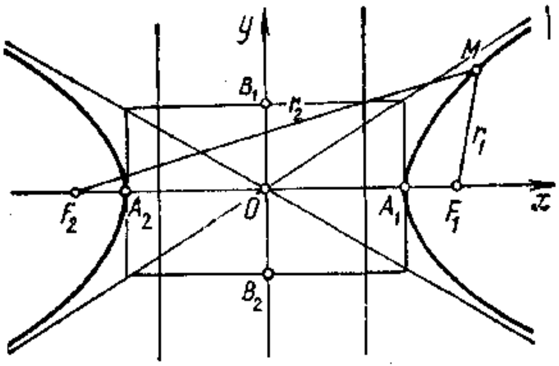

Рис. 6

Гіперболою є множина точок площини, різниця відстаней яких від двох фіксованих точок (фокусів гіперболи) є величина стала і дорівнює $2a$.

Віднесемо гіперболу до прямокутної декартової системи координат (рис. 6). Позначимо фокальну відстань F_1F_2 через $2c$, відрізок A_1A_2 – дійсною віссю гіперболи, довжина якої $2a$, відрізок B_1B_2 — уявною віссю гіперболи, довжина якої $2b$. Тоді рівняння гіперболи має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \left(b^2=c^2-a^2\right) \qquad (3)$$

Якщо уявна вісь має довжину $2a$ *і* збігається з віссю *Ox,* а дійсна вісь, довжина якої $2b$, збігається з віссю *Oy,* то маємо рівняння гіперболи, спряженої до гіперболи (3):

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (4)$$

Ексцентриситетом гіперболи е назвемо величину $\mathrm{e}=\frac{c}{a}$, яка більша за одиницю.

Директрисами гіперболи є дві прямі, перпендикулярні до фокальної осі F_1F_2, які знаходяться на відстані $\frac{a}{\mathrm{e}}$ від початку координат, а їх рівняння відповідно для гіпербол (3) і (4) мають вигляд

$$x=\pm\frac{a}{\mathrm{e}},\ \ y=\pm\frac{b}{\mathrm{e}}$$

Для гіперболи має місце відношення (2).

Параболою є множина точок площини, відстань яких від фіксованої точки площини (фокуса) дорівнює відстані від фіксованої прямої (директриси). Якщо розмістити параболу в

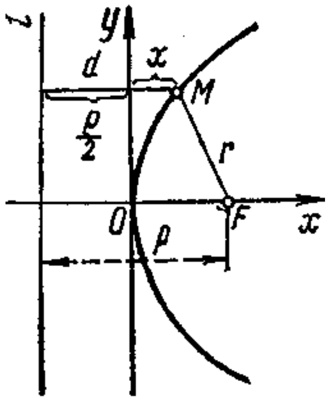

Рис. 7

прямокутній декартовій системі координат так, як це показано на рис. 7 (вісь Ox проходить через фокус F, перпендикулярно до директриси l, а вісь Oy поділяє відрізок осі Ox. між фокусом і директрисою навпіл), то рівняння параболи

$$y^2 = 2px, \qquad (5)$$

де p – відстань фокуса директриси.

Фокальний радіус довільної точки $M(x;\ y)$ параболи визначається рівнянням

На рис. 7 точка O — вершина параболи, вісь Ox — вісь симетрії. Тоді, згідно з

$$r = x + \frac{p}{2}.$$

означенням параболи, $\frac{r}{d}$ = 1 і, зрозуміло, *ексцентриситет параболи* e = $\frac{r}{d}$=1. Крім параболи (5), існують параболи, канонічні рівняння яких мають вигляд

$$y^2 = -2px, \quad x^2 = 2py, \quad x^2 = -2py.$$

Полярне рівняння, загальне для еліпса, однієї вітки гіперболи та параболи, при умові, що ρ, φ — полярні координати біжучої точки кривої, p — фокальний параметр, e — ексцентриситет, а полюс знаходиться в фокусі і полярна вісь напрямлена по осі лінії в бік, протилежний до найближчої до цього фокуса директриси, має вигляд

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\varphi} \qquad (6)$$

$$\left(\text{для еліпса і гіперболи} \quad p = \frac{b^2}{a}, \ \text{для параболи} \quad p = p\right).$$

ПРИКЛАДИ

1. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо: а) відстань між фокусами дорівнює 18, а велика піввісь дорівнює 12;

б) мала піввісь b = 6, e = $\frac{1}{4}$.

а) Маємо $2c$ = 18, a = 12. Тоді, оскільки $b^2 = a^2 - c^2$, то b^2 = 144—81 = 63. Отже, рівняння еліпса

$$\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{63} = 1.$$

б) Маємо b = 6, e = $\frac{1}{4}$, отже, $c = \frac{1}{4}a$. Тоді з співвідношення $b^2 = a^2 - c^2$ дістанемо a^2 = 38,4. Отже, рівняння еліпса запишеться у вигляді

$$\frac{x^2}{38{,}4} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

2. На правій вітці гіперболи $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{11} = 1$ знайти точку, відстань якої від правого фокуса в два рази менша за її відстань від лівого фокуса.

Для правої вітки гіперболи фокальні радіуси-вектори визначаються таким чином: r_1= e$x - a$, r_2 = e$x + a$. Отже, маємо рівняння e$x + a$ = 2(e$x - a$), звідки $x = \frac{3a}{e}$.

Оскільки $a = 6,\ b = \sqrt{11},\ e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \frac{6}{5}$, то $x = 15 : \frac{6}{5} = 12{,}5.$ З рівняння гіперболи

$y = \pm\frac{\sqrt{11}}{5} \times \sqrt{x^2 - 25} = \pm\frac{\sqrt{11}}{5}\sqrt{131{,}25} \approx \pm 7{,}599.$ Отже, умові задачі відповідають дві точки $P_1 = (12{,}5;\ 7{,}599)$ і $P_2\ (12{,}5;\ -7{,}599)$.

3. Встановити, які криві визначають рівняння:

$$а)\ \rho = \frac{2}{3 - \cos\varphi}; \quad б)\ \rho = \frac{3}{2 - 6\cos\varphi}; \quad в)\ \rho = \frac{1}{2 - 2\cos\varphi}$$

Перетворюючи задані рівняння у відповідності до рівняння (6), маємо:

а) $\rho = \dfrac{1}{3\left(1-\frac{1}{3}cos\varphi\right)}$, $\rho = \dfrac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}cos\varphi}$, отже $e = \dfrac{1}{3}$ і крива – еліпс;

б) $\rho = \dfrac{\frac{3}{2}}{1-3cos\varphi}$, $e = 3$ і крива – гіпербола

в) $\rho = \dfrac{\frac{1}{2}}{1-cos\varphi}$, $e = 1$ крива – парабола.

2.4. Площина

Нехай у тривимірному евклідовому просторі маємо площину, що проходить через задану точку M_0 (x_0, y_0; z_0) і перпендикулярна до деякого вектора $\vec{N}$ (A, B, C). Якщо M ($x; y; z$) — біжуча точка цієї площини, то рівняння вказаної площини має вигляд

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (1)$$

Позначаючи — Ax_0 — By_0 — Cz_0 через D, дістанемо *загальне рівняння площини:*

$$Ax+By+Cz+D = 0. \qquad (2)$$

Дослідимо це рівняння.

1. $A = 0$, маємо $By + Cz + D = 0$ — площина паралельна осі Ox.
2. $B = 0$, маємо $Ax + Cz + D = 0$ — площина паралельна осі Oy.
3. $C = 0$, маємо $Ax + By + D = 0$ — площина паралельна осі Oz.
4. $D = 0$, маємо $Ax + By+Cz +D = 0$ — площина проходить через початок координат.
5. $A = D = 0$, маємо $By + Cz = 0$ — площина проходить через вісь Ox.
6. $B = D = 0$, маємо $Ax + Cz = 0$ — площина проходить через вісь Oy.
7. $C = D = 0$, маємо $Ax + By = 0$ — площина проходить через вісь Oz.
8. $A = B = 0$, маємо $Cz + D = 0$ — площина перпендикулярна до осі Oz.
9. $A = C =$ О, маємо $By + D = 0$ — площина перпендикулярна до осі Oy.
10. $B = C = 0$, маємо $Ax + D = 0$ — площина перпендикулярна до осі Ox.
11. $A = B = D = 0$, $C \neq 0$, маємо $Cz = 0$ — площина, яка збігається з координатною площиною xOy.
12. $A = C = D = 0$, $B \neq 0$, маємо $By = 0$ — площина, яка збігається з координатною площиною xOz.
13. $B = C = D = 0$, $A \neq 0$, маємо $Ax = 0$ — площина, яка збігається з координатною площиною yOz.

Якщо вільний член D загального рівняння площини відмінний від нуля, то, поділивши всі члени цього рівняння на $-D$ і позначаючи $a = -\dfrac{D}{A}, b = -\dfrac{D}{B}$, $c = -\dfrac{D}{c}$, дістанемо рівняння площини у відрізках на осях:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (3)$$

(a, b, c – відрізки, які відтинає площина від відповідних осей Ox, Oy, Oz).

Нехай площину в просторі задано трьома точками M_1 (x_1, y_1; z_1), M_2 (x_2, y_2; z_2), M_3 (x_3, y_3; z_3), що не лежать на одній прямій. Нехай точка M (x, y; z) – довільна точка цієї площини. З умови компланарності векторів $\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}$ дістаємо рівняння площини, що проходить через три задані точки, а саме:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

Нехай дві площини задано загальними рівняннями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Кут між ними можна визначити, використовуючи скалярний добуток векторів, бо кутом між заданими площинами буде кут між їх нормальними векторами $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ *і* $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ знайдемо за формулою

$$cos\varphi = \pm\frac{(\vec{N}_1\vec{N}_2)}{|\vec{N}_1\vec{N}_2|}, \qquad (5)$$

або у координатному вигляді

$$cos\varphi = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (6)$$

Якщо площини перпендикулярні, тобто $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то $cos\ \varphi = 0$, і умовою перпендикулярності двох площин є співвідношення

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \qquad (7)$$

Якщо площини паралельні, то їх нормальні вектори колінеарні. Отже, умовою паралельності двох площин буде співвідношення

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \qquad (8)$$

Нехай задано площину. Опустимо з початку координат перпендикуляр на цю площину. Позначимо довжину відрізка цього перпендикуляра, який міститься між початком координат та точкою перетину перпендикуляра з площиною, через p, а кути, які утворює вектор напрямку цього перпендикуляра з осями координат *Ox, Oy, Oz*, позначимо відповідно α, β, γ. Тоді рівняння площини, довільна точка якої має координати x, y, z, записується у вигляді

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \qquad (9)$$

Це рівняння називають *нормальним рівнянням площини,* а косинуси кутів α, β, γ — *напрямними косинусами.* Зауважимо, що нормальне рівняння площини має такі властивості: вільний член завжди повинен бути від'ємним (саме число p, як довжина відрізка, є додатне), а сума квадратів коефіцієнтів при невідомих x, y, z дорівнює одиниці, тобто

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1 \qquad (10)$$

Щоб звести загальне рівняння (2) площини до нормального вигляду (9), треба помножити всі члени рівняння (2) на нормуючий множник

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \qquad (11)$$

у якому знак перед дробом беремо протилежним до знака вільного члена D з рівняння (2).

Нехай у просторі маємо площину, яку задано нормальним рівнянням (9). Якщо M_0 (x_0, y_0; z_0) — точка простору, яка не належить площині, то *відхиленням* δ точки M_0 від площини

$$\delta = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (12)$$

буде результат підстановки координат цієї точки (x_0, y_0; z_0) у ліву частину нормального рівняння площини, тобто

Відхиленням точки M_0 від площини є число $\delta = d$, якщо точка M_0 і початок координат лежать по один бік від площини, і число $\delta = —d$, якщо вони лежать по різні боки від неї. Число d — відстань точки M_0 від площини. Отже, $d = |\delta|$. Тому відстань точки M_0 від площини знаходять за формулою

Сукупність площин, які проходять через одну й ту саму пряму, називають *пучком площини.* Рівняння пучка площин має вигляд

$$d = \left| \pm \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|. \qquad (13)$$

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \qquad (14)$$

(загальну пряму для всіх площин пучка називають *віссю пучка).*

В'язкою площин з центром у точці A називають сукупність всіх площин простору, що проходять через точку A. Рівняння в'язки площин з центром у точці A (x_0, y_0; z_0) має вигляд

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (15)$$

ПРИКЛАДИ

1. Знайти рівняння площини, яка паралельна осі Ox і проходить через точки K (3; 2; —1) і P (—2; 3; 4).

Рівняння площини, яка паралельна осі Ox, має вигляд $By + Cz + D = 0$. Оскільки площині належать точки K і P, дістаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2B - C + D = 0, \\ 3B + 4C + D = 0. \end{cases}$$

Виразимо невідомі B і D цієї системи через C. Віднімаючи від першого рівняння друге, дістанемо $—B — 5C = 0$, тобто $B = —5C$, тоді $D = 11C$. Надаючи C довільного значення, наприклад 1, маємо $B = —5$, $D = 11$. Підставляючи одержані значення B, C і D у рівняння площини, маємо $5y — z — 11 ==0$.

2. Визначити відстань від точки M_0 (3; 5; —2) до площини $x + y — z + 2 = 0$.

Згідно з правилом знаходження відстані від точки до площини, знайдемо нормальне рівняння заданої площини. Визначаємо нормуючий множник

$$\mu = -\frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Отже, нормальне рівняння площини має вигляд

$$-\frac{x + y - z + 2}{\sqrt{3}} = 0.$$

Тоді, підставляючи в нормальне рівняння площини координати точки M_0 і беручи вираз по модулю, знайдемо відстань від точки M_0 до площини:

$$d = \left| \frac{1 \cdot 3 + 1 \cdot 5 - 1(-2) + 2}{-\sqrt{3}} \right| = 4\sqrt{3}.$$

3. Обчислити відстань між паралельними площинами $8x — 2y + z + 16 = 0$ і $8x — 2y + z - 7 = 0$.

Оскільки вільні члени у рівняннях площин мають різні знаки, то площини знаходяться по різні боки від початку координат. У такому разі відстань між ними d буде

$$\frac{8x - 2y + z + 16}{-\sqrt{69}} = 0, \quad \frac{8x - 2y + z - 7}{\sqrt{69}} = 0.$$

Тоді $p_1 = \frac{16}{\sqrt{69}}$, а $p_2 = \frac{7}{\sqrt{69}}$. Отже, $d = \frac{16}{\sqrt{69}} + \frac{7}{\sqrt{69}} = \frac{23}{\sqrt{69}} = \frac{\sqrt{69}}{3}$.

дорівнювати сумі p_1 і p_2 у відповідних нормальних рівняннях цих площин. Якщо б вільні члени мали однакові знаки, тобто площини лежали по один бік від початку координат, то відстань d між ними дорівнювала б модулю різниці p_1 і p_2. Таким чином, знаходимо p_1 і p_2, для цього записуємо рівняння обох площин у нормальному вигляді:

Можна було б вибрати точку на одній з площин і знаходити відстань від неї до другої площини.

4. Через точку $P(2; –1; 3)$ провести площину, паралельну площині $3x – y + 10z –1=0$.

Рівняння в′язки площин, що проходять через задану точку P, має вигляд

$$A(x – 2) + B (y + 1) + C(z – 3) = 0.$$

Із умови паралельності двох площин маємо

$$\frac{A}{3} = \frac{B}{(-1)} = \frac{C}{10} = k.$$

Тоді, замінивши в рівнянні в′язки коефіцієнти A, B, C величинами, їм пропорційними, дістанемо

$$3k (x–2) – k(y + 1) + 10k (z – 3) = 0.$$

або

$$3x – y + 10z – 37 = 0.$$

5. Знайти гострий кут між двома площинами:

$$2x – y + z – 11 = 0 \text{ і } 4x – y + 17z + 1 = 0.$$

Згідно з формулою (6), для знаходження кута між площинами необхідно знати координати нормальних векторів площин. Отже, враховуючи це, дістаємо $\vec{N}_1 = (2, –1, 1)$, $\vec{N}_2 = (4, –1, 17)$. Тоді

$$cos\varphi = \left|\frac{8+1+17}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{306}}\right| \approx 0{,}6068, \quad \text{звідки} \quad \varphi = 52{,}6423^\circ.$$

2.5. Пряма лінія в просторі

Якщо в просторі в прямокутній декартовій системі координат маємо пряму l, що проходить через задану точку $M (x_0; y_0; z_0)$ і паралельна деякому вектору $\vec{s} = (m; n; p)$, який зветься напрямним вектором цієї прямої, то канонічне рівняння прямої l має вигляд
(x, y, z) — координати довільної точки M прямої l).

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} \tag{1}$$

Прирівнюючи кожне з відношень в рівняннях (1) до параметра t, дістанемо параметричні рівняння прямої l:

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad z = z_0 + nt \tag{2}$$

Якщо пряма l проходить через дві задані на ній точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, то вектор M_1M_2 можемо прийняти за напрямний вектор прямої l, тоді, враховуючи рівняння (1) прямої, дістаємо рівняння прямої, що проходить через дві задані точки M_1 і M_2:

Розглянемо випадок, коли пряму l задано перетином двох площин

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{3}$$

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{4}$$

(очевидно, ці площини непаралельні, отже, вектори-нормалі $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ і $\vec{N}_2 = =(A_2, B_2, C_2)$ неколінеарні та їхні координати непропорційні).

Щоб записати рівняння прямої l, яку задано системою (4), у канонічному вигляді, необхідно знати напрямний вектор прямої і певну точку на ній. Напрямний вектор $\vec{s}$ прямої l запишемо у вигляді

$$\vec{s} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \ \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \ \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right). \qquad (5)$$

Надавши якійсь змінній із системи (4), наприклад змінній z, певного значення z_0, розв'яжемо одержану систему і знайдемо $x_0 = f(z_0)$, $y_0 = \varphi(z_0)$. Отже, ми знайшли на l певну точку M_0 (x_0; y_0; z_0).

Кутом між прямими l_1 і l_2 у просторі називається кут θ між їхніми напрямними векторами. Якщо l_1 і l_2 задано канонічними рівняннями

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}, \quad \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2},$$

то

$$\cos\theta = \pm \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \qquad (6)$$

Умовою паралельності прямих у просторі є співвідношення

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}. \qquad (7)$$

Умовою перпендикулярності прямих у просторі є

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 \qquad (8)$$

Умовою перетину прямих l_1 і l_2 у просторі є

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (9)$$

Якщо ж рівність (9) не виконується, то прямі мимобіжні

ПРИКЛАДИ

1. Скласти канонічне рівняння прямої

$$\begin{cases} 2x + 3y - z + 2 = 0, \\ x - 2y + 1 = 0. \end{cases}$$

Покладемо $z = 0$, тоді, розв'язуючи систему, дістаємо x_0 = —1, y_0 = 0. Отже, ми знайшли одну з точок прямої — точку M_0 (—1**;** 0; 0). Знаходимо напрямний вектор $\vec{s}$ шуканої прямої як векторний добуток нормальних векторів $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$ площин, перетином яких є ця пряма. Оскільки $\vec{N}_1 = (2,\ 3, -1)$ і $\vec{N}_2 = (1, -2, 0)$, то $\vec{s} = [\vec{N}_1\ \vec{N}_2] = (2, -1, -7)$.

Отже, канонічне рівняння шуканої прямої має вигляд

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-7}.$$

2. Знайти гострий кут між двома прямими:

$$\frac{x - 2}{2} = \frac{y - 1}{3} = \frac{z}{4} \ \text{ і } \ \frac{x}{2} = \frac{y - 3}{5} = \frac{z - 8}{-1}.$$

Маємо $l_1 = 2$, $m_1 = 3$, $n_1 = 4$, $l_2 = 2$, $m_2 = 5$, $n_2 = -1$, тоді, користуючись формулою (6), дістаємо

$$cos\theta = \pm\frac{4+15+(-4)}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{30}} \approx \pm 0{,}508.$$

За умовою нам потрібен лише гострий кут між прямими. Отже, $cos\ \theta = 0{,}508$, звідки $\theta = 59{,}432862°$.

3. Через точку M (1; —2; 3) провести пряму, яка паралельна прямій

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z+1}{-3}.$$

Запишемо рівняння прямої, що проходить через точку M. За формулою (1) маємо

Згідно з умовою (7), за напрямний вектор шуканої прямої можна взяти напрямний

$$\frac{x-1}{l} = \frac{y+2}{m} = \frac{z-3}{n}.$$

вектор заданої прямої. Тоді рівняння шуканої прямої буде мати вигляд

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{-3}.$$

4. Довести перпендикулярність прямих l_1 і l_2, заданих відповідно рівняннями

$$x = 2t-1,\ y = 3t-2,\ z = 2t+1 \quad \text{і} \quad \begin{cases} 2x+3y+2z+8=0, \\ x-y-z-9=0. \end{cases}$$

Рівняння прямих l_1 і l_2 запишемо у канонічному вигляді

$$l_1 : \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{2},$$

$$l_2 : \frac{x-4}{-1} = \frac{y+6}{4} = \frac{z-1}{-5}.$$

Перевіряємо умову перпендикулярності (8) прямих l_1 і l_2. Маємо $2(-1)+3\cdot 4 + +2(-5) = 0$. Отже, l_1 і l_2 перпендикулярні.

5. Скласти рівняння руху точки M (x; y; z), яка, маючи початкове положення M_0(2; –1; –2), рухається прямолінійно і равномірно в напрямі вектора $\vec{s}$ = (–2, 3, 6) із швидкістю v = 35.

Рівняння руху точки M (x; y; z) має вигляд $x = x_0 + lt$, $y = y_0 + mt$, $z = z_0 + nt$, де x_0; y_0; z_0 – координати точки M_0, через яку проходить пряма, а l, m, n – координати вектора напряму руху, які повинні задовольняти умову $v = \sqrt{l^2+m^2+n^2}$. Оскільки даний вектор напряму $\vec{s}$ має координати (–2, 3, 6) і його модуль дорвнює 7, для того щоб виконувалась умова $\sqrt{l^2+m^2+n^2}$ =35, необхідно, щоб вектор напряму руху $\vec{p} = 5\vec{s}$. Тоді $\vec{p}$ = (–10, 15, 30). Отже, рівняння руху запишеться у вигляді $x = 2 - 10\,t$, $y = -1 + 15t$, $z = -2 + 30t$.

2.6. Взаємне розміщення прямої і площини

Пряма у просторі може перетинати задану площину, бути до неї паралельною або лежати в ній.

Нехай пряма l, задана канонічним рівнянням

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n},$$

перетинає площину, задану загальним рівнянням

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Записавши рівняння прямої l у параметричному вигляді

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad z = z_0 + nt$$

і підставивши у рівняння площини замість x, y, z їх значення з параметричного рівняння прямої, знайдемо значення параметра t, яке відповідає шуканій точці перетину. Отже, маємо

$$A(x_0 + lt) + B(y_0 + mt) + C(z_0 + nt) + D = 0.$$

Тоді

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn}.$$

Таким чином, координати точки перетину прямої l з площиною матимуть вигляд

$$x = x_0 - \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn} \cdot l,$$

$$y = y_0 - \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn} \cdot m,$$

$$z = z_0 - \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn} \cdot n.$$

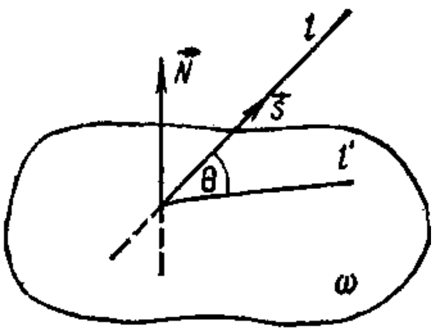

Рис. 9

Кутом між прямою і площиною в просторі будемо називати кут θ між прямою l і її проекцією l' на площину (рис. 9). Якщо пряму l задано канонічним рівнянням

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

а площину — загальним рівнянням

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

то

$$\sin\theta = \pm\frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \qquad (1)$$

Якщо пряма l паралельна площині, то $\theta = 0$. Отже,

$$Al + Bm + Cn = 0. \qquad (2)$$

Якщо ж пряма l перпендикулярна до площини, то

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n} \qquad (3)$$

$$\left(\vec{s} \parallel \vec{N},\ де\ \vec{s} = (m, n, p), \vec{N} = (A, B, C)\right).$$

Розглянемо випадок, коли пряма лежить у площині. Якщо пряма l:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

лежить у площині $Ax + By + Cz + D = 0$, то вона має з площиною спільну точку і паралельна їй. Отже, нехай точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ прямої l лежить на площині, тоді

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

Оскільки пряма l паралельна площині, то

$$Al + Bm + Cn = 0$$

Таким чином, справедливість виконання умов

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \\ Al + Bm + Cn = 0, \end{cases}$$

виражає умову належності прямої l до площини. Рівняння

$$A\,(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

при умові, що

$$Al + Bm + Cn = 0$$

є рівнянням площини, яка проходить через пряму l.

ПРИКЛАДИ

1. Знайти точку перетину прямої

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{3}$$

з площиною $3x + y — z — 8 = 0$

Параметричне рівняння даної прямої має вигляд

$$x = 2t + 1, \quad y = —t — 2, \quad z = 3t + 1.$$

Підставляючи значення x, y, z з цих рівнянь в рівняння площини, дістаємо

$$3\,(2t + 1) + (t — 2) - (3t + 1) — 8 = 0.$$

Звідси $t = 4$. Підставляючи знайдене значення і у параметричне рівняння прямої, дістаємо координати точки перетину прямої з площиною:

$$x = 9, \quad y = — 6, \quad z = 13.$$

2. Через точку $A(—1;\ 2;\ 0)$ провести пряму, паралельну прямій m, що задана рівнянням

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+4}{0} = \frac{z}{-3}.$$

Якщо шукана пряма паралельна заданій, то за її напрямний вектор можна вибрати напрямний вектор заданої прямої, тобто $\vec{s}_1 = (1, 0, —3)$. Тоді, згідно з рівнянням (1), п.3.2, одержуємо рівняння шуканої прямої:

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z}{-3}.$$

3. Через точку $A(—3;\ —1;\ 1)$ провести пряму, перпендикулярну до площини α, яку задано рівнянням $2x — y + z —1 = 0$.

Якщо пряма, рівняння якої треба знайти, перпендикулярна до площини α, то вона паралельна її нормальному вектору $\vec{N} = (2, —1, 1)$, який можна взяти за напрямний вектор шуканої прямої. Тоді рівняння шуканої прямої матиме вигляд

$$\frac{x+3}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1}.$$

4. Через точку $A(—3; 1; —1)$ і пряму $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+2}{-1}$ провести площину α.

Перевіримо, чи належить точка A прямій. Оскільки

$$\frac{-3+1}{-1} \neq \frac{1+2}{3} \neq \frac{-1+2}{-1},$$

то точка A не належить заданій прямій. Задана пряма проходить через точку M_0 (–1; 2; –2), тому, вибираючи на площині α довільну точку M $(x,\ y,\ z)$ і розглядаючи три компланарні

$$\left(\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{AM_0}, \vec{s}\right) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$ $$2x + 3y + 7z + 10 = 0.$$

вектори $\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{AM_0}$ і $\vec{s}$ – напрямний вектор заданої прямої, дістанемо з умови компланарності векторів рівняння шуканої площини:

5. Через дві прямі, задані відповідно рівняннями

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-5}{4}, \quad \frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1},$$

провести площину α.

Спочатку дослідимо взаємне розташування заданих прямих, для цього використаємо умову перетину двох прямих (див.(9), п.3.2):

Бачимо, що визначник дорівнює нулю. Отже, прямі перетинаються. Виберемо на шуканій площині α довільну точку М (x, y, z) і розглянемо три компланарні

$$\begin{vmatrix} 5 & -8 & -5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

вектори $\overrightarrow{M_0M}$ ($M_0(1;\ 7;\ 5)$ – відома точка на одній з заданих прямих), $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$ (напрямні вектори заданих прямих). З умови їх компланарності дістаємо рівняння шуканої площини α:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-7 & z-5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0,\ 9x + 10y - 7z - 44 = 0.$$

Список використаної та рекомендованої літератури

1. Клепко В.Ю., Голець В.Л. Вища математика в прикладах і задачах: Навчальний посібник. 2-ге вид. Київ.: Центр учбової літератури, 2009. 594 с.

2. Вища математика. Практикум/ В.Г. Кривуца, В.В. Барковський, Н.В. Барковська. Київ.: ЦУЛ, 2003. 536с.

3. Овчинников П.Ф., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика. Підручник у 2 ч. Ч.1. Лінійна та векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення. – Київ.: Техніка, 2007. 600 с.

4. Овчинников П.Ф., Михайленко В.М. Вища математика. Підручник у 2 ч. Ч.2. Диференціальні рівняння. Операційне числення. Ряди та їх застосування. Стійкість за Ляпуновим. Рівняння з математичної фізики. Оптимізація і керування. Теорія ймовірностей. Числові методи. Київ.: Техніка, 2004. 792 с.

5. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика. Підручник для студ. вищ. пед. навч. закл. Київ.: Либідь, 2010. 592 с.

6. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика. Підручник для студ. вищ. пед. навч. закл. Київ.: Либідь, 2010. 496 с.

7. Вища математика. Основні розділи: У 2 кн. Кн. 1: Підручник для природ. спец. ун-тів і вищих техн. навч. закладів/ Г.Й. Призва [та інші]; за ред. Г.Л. Кулініч. Київ: Либідь, 1995. 371 с.

8. Вища математика для майбутніх інженерів: навч. посібник/ К.В. Власенко; за ред. проф. О.І. Скафи. Донецьк: Ноулідж, 2010. 430 с.

9. Коваленко І.П. Вища математика. Навч. посіб. Київ.: Вища школа, 2006. 343 с.

10. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. Навч. посіб. Київ.: А.С.К., 2006. 648 с.

11. Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю., Михалін Г.О. Вища математика: Приклади і задачі/ Посібник. Київ: ВЦ «Академія», 2003. 624 с.