МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЕКОНОМІКИ І ТЕХНОЛОГІЙ
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ ІНСТИТУТ
Кафедра електричної інженерії та автоматизації

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Конспект лекцій з курсу „Вища математика з елементами моделювання функціоналу технічних систем”

для здобувачів вищої освіти на першому (бакалаврському) рівні денної та заочної форм навчання всіх спеціальностей

РЕКОМЕНДОВАНО
на засіданні кафедри електричної інженерії та автоматизації
(протокол № 2 від 18.09.2025 р.)

ПОГОДЖЕНО
Науково-методичною радою Державного університету економіки і технологій
(протокол № 3 від «21»10.2025 р.)

м. Кривий Ріг
2025 р.

Конспект лекцій з курсу „Вища математика з елементами моделювання функціоналу технічних систем” для здобувачів вищої освіти на першому (бакалаврському) рівні денної та заочної форм навчання всіх спеціальностей. Державний університет економіки і технологій, Навчально-науковий технологічний інститут, кафедра електричної інженерії та автоматизації; уклад. В. ГРИГОР`ЄВА. Кривий Ріг, 2025. 51 с.

Укладач:	Вікторія ГРИГОР`ЄВА	доцент, к.т.н.
Відповідальний за випуск:	Вікторія ГРИГОР`ЄВА	доцент, к.т.н.

Конспект лекцій з освітнього компоненту «**Вища математика з елементами моделювання функціоналу технічних систем**» для здобувачів вищої освіти на першому (бакалаврському) рівні за спеціальностями G11 «Машинобудування»; G10 «Металургія»; G3 «Електрична інженерія»; G7 «Автоматизація, комп’ютерно-інтегровані технології та робототехніка»; G1 «Хімічні технології та інженерія»; G16 «Гірництво та нафтогазові технології» денної та заочної форм навчання розроблено у відповідності до навчального плану з метою надання здобувачам вищої освіти методичної допомоги у поглибленні знань і набутті практичних навичок.

ЗМІСТ

ЛЕКЦІЯ 1.

Тема лекції: Диференціальні рівняння: основні поняття й означення.

План лекції:

1. Задачі, які зводяться до розв'язання диференціальних рівнянь.
2. Основні означення.
3. Різні види диференціальних рівнянь.
4. Що означає поняття : загальний розв'язок диференціального рівняння?

1. В математиці диференціальні рівняння займають особливе місце. Математичні дослідження різноманітних явищ, що відбуваються в навколишньому середовищі, часто приводять до розв'язання таких рівнянь, оскільки самі закони, яким підпорядковуються ті чи інші явища, записуються у вигляді диференціальних рівнянь. Диференціальними називаються рівняння тому, що вони пов'язують диференціали або похідні величин, які досліджуються. Багато законів природи можуть бути виражені через похідні, наприклад, другий закон механіки $F = \frac{d^2(m\bar{r})}{dt^2}$ Досить часто в результаті експерименту можна одержати не шукану величину, а її похідну. Так, рух зірок можна помітити, якщо спостерігати за ними протягом тисячоліть, а швидкості їх руху відносно Землі (за допомогою ефекту Доплера-Фізо) можна визначити миттєво. Якщо знати швидкість, то можна знайти траєкторію.

2. Диференціальним називається рівняння, яке пов'язує шукану функцію, її похідні і аргументи, тобто:
$f(x, y, y', y'', y''', ..., y^{(n)}) = 0$

Приклади.

1. $2x + \frac{dy}{dx} = 0,$ де x – незалежна змінна, y(x) – невідома функція.

2. $ax + by + c\frac{\partial z}{\partial x} + R\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, де x, y – незалежні змінні, z=f(x,y) – невідома функція двох змінних.

3. $7\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 9x = 0$, де x(t) – невідома функція t – незалежна змінна.

3. Перше і третє рівняння прийнято називати **звичайними**, а друге – **з частинними похідними**. Якщо у диференціальному рівнянні невідомою є функція кількох змінних, тобто невідома функція входить до рівняння разом зі своїми частинними похідними, то рівняння називається **рівнянням з частинними похідними.**

Якщо до рівняння входять невідомі функції лише однієї змінної, то рівняння називається **звичайним**.

Якщо невідомих функцій однієї змінної декілька, то йдеться про систему звичайних диференціальних рівнянь, у противному разі – про саме рівняння.

Приклади:

4. Система двох звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = 5x - 7y \end{cases}$$

Невідомими є дві функції x, y однієї змінної t.

5. Звичайне диференційне рівняння:

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \sin x \frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + ytgx = ctgx$$

Порядком диференціального рівняння називається найвищий порядок похідної, що входить до рівняння. Так, у прикладах 1,2 рівняння має перший порядок, у прикладі 3 – другий, у прикладі 4 наведено систему двох рівнянь першого порядку, у прикладі 5 – звичайне диференціальне рівняння третього порядку.

Рівняння виду $f(x, y, y', y'', y''',..., y^{(n)}) = 0$ є рівнянням, записаним у **неявній формі.**

Рівняння, розв'язане відносно похідної, має вигляд:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', y''',..., y^{(n-1)})$$

його називають рівнянням в **явній** формі.

4. Нехай у функціях F і f змінна x визначена на множині $G \subset R$. **Розв'язати диференціальне рівняння** означає знайти таку диференційовану в G функцію $y = \varphi(x)$, підставляння якої в рівняння перетворює його у тотожність для всіх $x \in G$. Графік розв'язку диференціального рівняння називається **інтегральною кривою**.

Розв'язком рівняння буде функція, що містить стільки довільних сталих, яким є порядок рівняння: $y = \varphi(x, c_1, c_2,..., c_n)$.

Даний розв'язок називають загальним розв'язком диференціального рівняння.

Особливістю загальних розв'язків є явна залежність функції y від x. Проте можуть бути і такі рівняння, розв'язки яких вдається записати лише у неявній формі, тобто у вигляді:

$$\Psi(x, y, c) = 0, \quad \Psi(x, y, c_1, c_2,..., c_n) = 0$$

Неявна форма запису загального зв'язку диференціального рівняння називається **загальним інтегралом.**

ЛЕКЦІЯ 2.

Тема лекції: Диференціальні рівняння першого порядку: основні означення і поняття. Рівняння з відокремлюваними змінними.

План лекції:

1. Диференціальні рівняння першого порядку.
2. Теорема про існування та єдиність розв'язку.
3. Загальний та частинний розв'язки диференціального рівняння першого порядку.
4. Особливі розв'язки. Поле напрямів.

1. Диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння вигляду:

$F(x, y(x), y'(x)) = 0$,

де F – задана функція своїх аргументів, x – незалежна змінна, y(x), $y'(x)$ – невідома (шукана) функція та її похідна.

Розв'яжемо дане рівняння відносно $y'(x) : y' = f(x, y)$. Воно називається **диференціальним рівнянням першого порядку, розв'язаним відносно похідної.**

Розв'язком диференціального рівняння на деякому інтервалі (a,b) називається диференційована на цьому інтервалі функція $y = \varphi(x)$, яка при підстановці у це рівняння замість невідомої функції перетворює його у тотожність.

2. Надалі будемо розглядати рівняння, розв'язане відносно похідної: $y' = f(x, y)$. Нехай функція $f(x, y)$ визначена у деякій відкритій області D площини xOy, а функція $y = \varphi(x)$ - розв'язок рівняння $y' = f(x, y)$. Тоді область визначення функції $y = \varphi(x)$ має належати області D і бути в ній диференційованою. Нехай в D задано точку M_0 з координатами x_0, y_0 таку, що $y(x_0) = y_0$. Ставимо задачу: знайти умови, що накладаються на функцію $f(x, y)$, за яких рівняння $y' = f(x, y)$ має розв'язок, що задовольняє умову $y(x_0) = y_0$. Така задача називається **задачею Коші**. Розв'язок цієї задачі визначається **теоремою Коші**.

Теорема (про існування і єдиність розв'язку).

Якщо в рівнянні $y' = f(x, y)$ функції $f(x, y)$ і $f'(x, y)$ неперервні в області D, яка містить точку M_0, то існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ цього рівняння, який задовольняє умові $y(x_0) = y_0 = \varphi(x_0)$ $\forall(x_0, y_0) \in D$.

З геометричної точки зору в теоремі твердиться, що при виконанні умов теореми через кожну внутрішню точку області D проходить єдина інтегральна крива.
Умова, яка говорить про те, що для ДР $y' = f(x, y)$ виконується рівність $y(x_0) = y_0$, називається **початковою.**

3. **Загальним розв'язком диференціального рівняння першого порядку** $y' = f(x, y)$ називається функція $y = \varphi(x, c)$ яка залежить від сталої С і задовольняє вимогам:
   1) для довільного С вона є розв'язком рівняння;
   2) для довільних початкових умов $y(x_0) = y_0$ існує таке значення C_0, що $y = \varphi(x_0, c_0)$

Частинним розв'язком називається розв'язок, який одержується із загального при конкретному значенні $C_0(y = \varphi(x, c_0))$ за допомогою початкових умов.
Якщо загальний розв'язок диференціального рівняння $y' = f(x, y)$ знайдено у неявному вигляді, тобто у вигляді рівняння $\phi(x, y, C) = 0$, то такий розв'язок називають **загальним інтегралом** цього рівняння.
Рівність $\phi(x, y) = 0$ називають **частинним інтегралом** диференціального рівняння.
З геометричної точки зору загальний розв'язок ДР $y = \varphi(x, c)$ – це множина інтегральних кривих, а частинний розв'язок – одна з ліній множини, що проходить через задану точку (x_0, y_0) (рис.2.1).

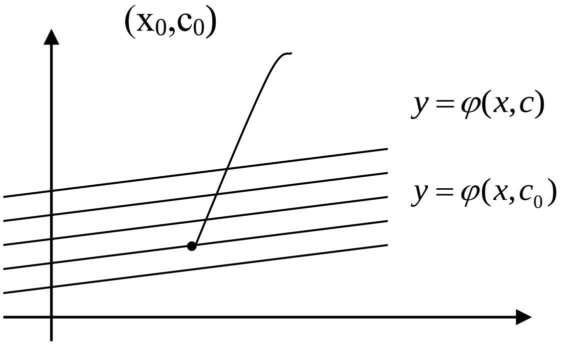

Рисунок 2.1.

Розв'язати задачу Коші означає виділити з множини інтегральних кривих таку, яка проходить через задану точку (x_0, y_0).

4. Рівняння $y' = f(x, y)$ має розв'язок, якщо воно задовольняє умови теореми про існування та єдиність розв'язку. Точки площини, в яких не виконуються умови теореми, називаються **особливими.** Розв'язок диференціального рівняння, в кожній точці якого порушується умова єдиності, називається **особливим розв'язком**.

Нехай дано рівняння $y' = f(x,y)$. Виберемо конкретну точку $M_0(x_0, y_0)$ з області D визначення $f(x,y)$ і обчислимо значення $f(x_0, y_0)$. Число $f(x_0, y_0)$, згідно з рівнянням $y' = f(x,y)$, є кутовим коефіцієнтом дотичної до інтегральної кривої рівняння $y' = f(x,y)$. Побудуємо у даній точці (x_0, y_0) напрямлену дотичну у вигляді невеликого відрізка. Виконавши побудову для всіх точок області D, дістанемо так зване поле напрямів (рис.2.2).

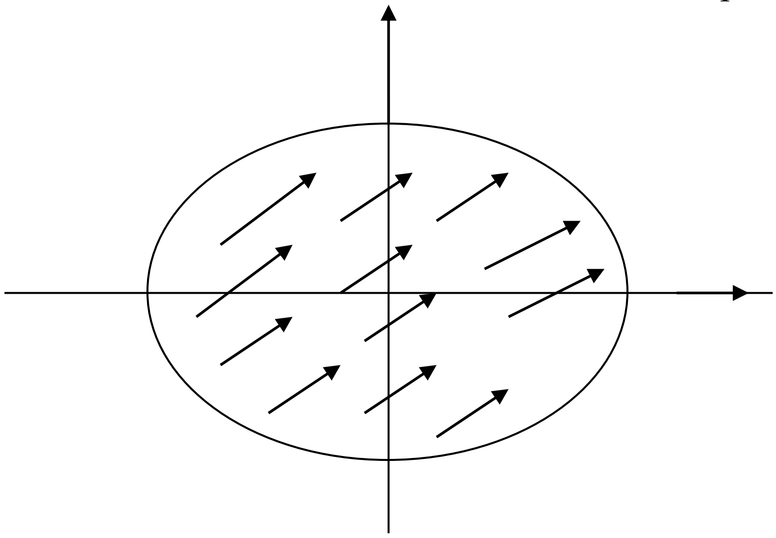

Рисунок 2.2.

Отже, геометрично рівняння $y' = f(x,y)$задає поле напрямів дотичних до розв'язку цього рівняння , тобто до інтегральної кривої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$. На такому геометричному тлумаченні рівняння $y' = f(x,y)$ ґрунтуються наближені методи розв'язування рівняння $y' = f(x,y)$. Один з таких методів називається **методом ізоклін**. **Ізокліною поля напрямів** називається геометричне місце точок, в яких напрям поля однаковий. Рівнянням ізокліни є:

$$y' = const, f(x,y) = const.$$

Метод ізоклін наближеного розв'язування диференціального рівняння першого порядку, розв'язаного відносно похідної, у загальному вигляді можна подати таким чином.

Нехай дано диференціальне рівняння $y' = f(x,y)$ з початковими умовами $y(x_0) = y_0$. Припустимо, що рівняння має єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$, графік якого зображено на рис.2.2 у вигляді кривої M_0M. Розіб'ємо криву на n частин і кожну частину кривої замінимо відрізком дотичної у певних точках кривих. Інтегральну криву тепер можна замінити ламаною , що утворюється з відрізків дотичних. Відрізки дотичних дістають з рівняння $y' = const, f(x,y) = const.$

Приклад. Дано рівняння $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ і початкова умова $y(x_0) = 0$. Побудуємо ізокліни, поклавши, що $\frac{dy}{dx}$ дорівнює $0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, 1, \sqrt{3}$. Дістанемо рівняння ізоклин - ліній з однаковим нахилом дотичних:

$$x^2 + y^2 = 0, y' = 0, tg\alpha_0 = 0, \alpha_0 = 0,$$

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}, y' = \frac{1}{\sqrt{3}}, tg\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \alpha_1 = 30^0,$$

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}, y' = \frac{1}{2}, tg\alpha_2 = \frac{1}{2}, \alpha_2 = 35^0,$$

$$x^2 + y^2 = 1, y' = 1, tg\alpha_3 = 1, \alpha = 45^0,$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{3}, y' = \sqrt{3}, tg\alpha_4 = \sqrt{3}, \alpha_4 = 60^0.$$

У відомій точці $M_0(0,0)$ інтегральної кривої кут α_0, утворений дотичною з віссю Ox, дорівнює 0. Проведемо з точки M_0 відрізок дотичної до перетину із найближчою ізокліною. Із точки перетину відрізка дотичної з ізокліною M_1 проведемо відрізок дотичної під кутом $\alpha_1 = 30^0$ до перетину з наступною ізокліною M_2 і т. д. В результаті дістанемо ламану, яка наближено зображає розв'язок даного рівняння. Ця ламана тим точніше зображатиме розв'язок, чим густіше будуть розташовані ізокліни.

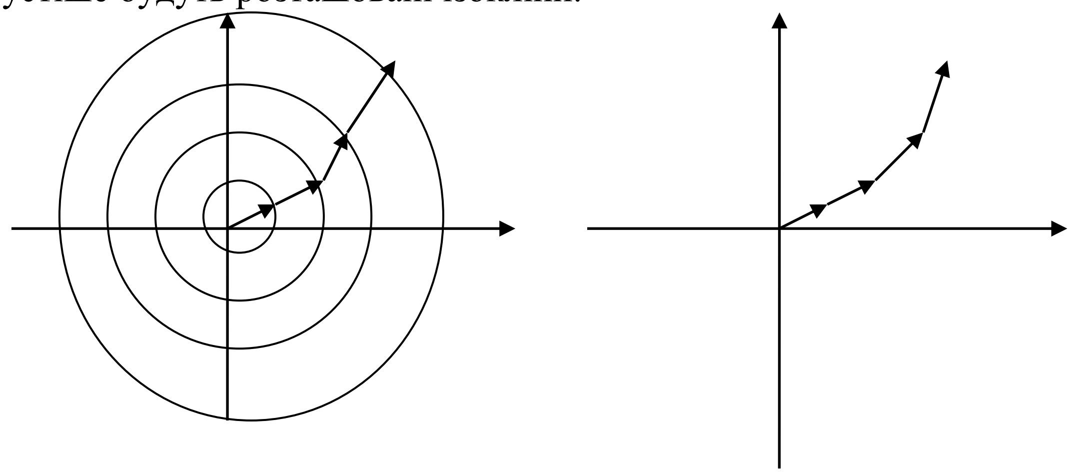

Рисунок 2.3.

ЛЕКЦІЯ 3.

Тема лекції: Рівняння з відокремлюваними змінними. Однорідні диференціальні рівняння.

План лекції:

1. Інтегровні типи диференціальних рівнянь першого порядку.
2. Рівняння з відокремленими змінними.
3. Рівняння з відокремлюваними змінними.
4. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку.
5. Рівняння, що зводяться до однорідних.

1. Розглянемо рівняння першого порядку, розв'язане відносно першої похідної: $y' = f(x, y)$ або $x' = q(y, x)$,

де невідомою є функція $y(x)$ (або $x(y)$), а відомою функція f(x,y) (або q(x,y)). Враховуючи, що $y' = \frac{dy}{dx}$, $x' = \frac{dx}{dy}$, і припускаючи, що можна подати f(x,y) або q(x,y) у вигляді $\frac{P(x, y)}{Q(p, y)}$, рівняння $y' = f(x, y)$ запишемо у симетричній формі.

$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ **(1)**

З останнього рівняння легко дістати різні типи диференціальних рівнянь першого порядку, що допускають розв'язування в інтегралах (**інтегральні типи диференціальних рівнянь**).

2. Рівняння з відокремленими змінними.

Якщо в рівнянні (1) P(x,y) не залежить від y, а Q(x,y) не залежить від x, то дістанемо рівняння

$P(x)dx + Q(y)dy = 0$ **(2)**

Це рівняння називається рівнянням з **відокремленими змінними**. Для його розв'язання візьмемо від обох частин інтеграл:

$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C$

Після обчислення інтегралів дістанемо розв'язок рівняння (2) у вигляді загального інтеграла.

Усі подальші методи розв'язування рівняння(1) базуються на зведенні цих рівнянь до рівняння (2) з відокремленими змінними.

3. Рівняння з відокремлюваними змінними.

Якщо в рівнянні (1) P(x,y) і Q(x,y) можна подати у вигляді $P(x, y) = N(x)R(y), Q(x, y) = M(x)K(y)$, то рівняння (1) запишемо у вигляді

$N(x) \cdot R(y)dx + M(x) \cdot K(y)dy = 0$ **(3)**

Це рівняння називають рівнянням з **відокремлюваними змінними**. Метод його розв'язування полягає у наступному. Розділивши (3) на добуток M(x)R(y), дістанемо:

$$\frac{N(x)}{M(x)}dx+\frac{K(x)}{R(y)}dy=0 \qquad \textbf{(4)}$$

Це рівняння є рівнянням з відокремленими змінними, тобто типу (2). Операція ділення рівняння (3) на добуток M(x)R(y) називається **відокремленням змінних.**

Інтегруючи (4) дістанемо загальний інтеграл вихідного рівняння

$$\int\frac{N(x)}{M(x)}d(x)+\int\frac{K(y)}{R(y)}d(y)=C$$

При діленні рівняння (3) на добуток M(x)R(y) можна втратити деякі розв'язки, які випливають з рівняння M(x)R(y)=0. Визначаючи із останнього рівняння розв'язки $y=\varphi(x)$, треба перевірити, чи є воно розв'язком рівняння(3). Якщо ні, то його треба відкинути, а коли так, то перевірити, чи входить воно до загального інтеграла. Якщо входить, то воно є частинним розв'язком, а якщо не входить, то цей розв'язок називається **особливим**.

Приклад. Розв'язати рівняння:

$$(1+x)ydx+(1-y)xdy=0.$$

Рівняння ділимо на добуток xy і дістаємо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{1+x}{x}dx+\frac{1-y}{y}dy=0; \qquad \int dx+\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dy}{y}-\int dy=0.$$

Його розв'язком є загальний інтеграл:

$$x+\ln|x|+\ln|y|-y=C$$

$$\ln|xy|+x-y=C$$

Тут рівняння $M(x)R(y)=0$ має вигляд $xy=0$. Його розв'язки x=0, y=0 є розв'язками вихідного рівняння, але не входять до загального інтеграла. Отже, розв'язки x=0, y=0 є особливими.

4. Однорідні диференціальні рівняння.

Нехай дано рівняння $y'=f(x,y)$.

Функція $f(x,y)$ називається **однорідною n-го порядку виміру відносно x,y**, якщо:

$$f(tx,ty)=t^n f(x,y)$$

Наприклад:

1) $f(x,y)=\dfrac{y}{x};\ f(tx,ty)=\dfrac{ty}{tx}=t^0\cdot\dfrac{y}{x}=t^0\cdot f(x,y)$

Функція $\frac{y}{x}$ є однорідною функцією нульового виміру.

2) $f(x,y)=x^2-y^2$;

$$f(tx,ty)=t^2x^2-t^2y^2=t^2(x^2-y^2)=t^2\cdot f(x,y)$$

Функція $f(x,y)=x^2-y^2$ – однорідна функція другого виміру.

3) Однорідна функція нульового виміру:

$$f(x,y)=\frac{ax+by}{cx+dy};\quad f(tx,ty)=t^0\,\frac{ax+by}{cx+dy}=t^0\cdot f(x,y)$$

4) $f(x,y)=\dfrac{ax+by+C}{a_1x+b_1y+C_1}$ не є однорідною функцією

Диференціальне рівняння вигляду

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

називається **однорідним відносно змінних x та y,** якщо функції $M(x,y)$ та $N(x,y)$ є однорідними функціями однакового виміру.

Останнє рівняння простим перетворенням зводиться до вигляду $y'=f(x,y)$, де функція $f(x,y)$ є однорідною функцією нульового виміру, тобто для будь – якого $t\neq 0$: $f(tx,ty)=t^0 f(x,y)=f(x,y)$.

Теорема. Однорідне рівняння можна звести до рівняння з відокремлюваними змінними за допомогою підстановки:

$y=U(x)\cdot x.$ Тоді: $y=ux, y'=u'x+u, u=\dfrac{y}{x}$

Приклад. Розв'язати рівняння:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{xy}{x^2-y^2}$$

Задане рівняння належить до рівнянь з однорідною функцією. Дійсно:

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2-y^2};$$

$$f(tx,ty)=\frac{txty}{t^2x^2-t^2y^2}=t^0\,\frac{xy}{x^2-y^2}=t^0\cdot f(x,y)$$

Покладемо y=ux. Тоді: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{du}{dx}x+u$

Підставимо все у вихідне рівняння:

$$x\frac{du}{dx}+u=\frac{x^2u}{x^2-x^2u^2};$$

$$x\frac{du}{dx}+u=\frac{u}{1-u^2};$$

$x\frac{du}{dx}=\frac{u}{1-u^2}-u$; $x\frac{du}{dx}=\frac{u^3}{1-u^2}$;

$\frac{1-u^2}{u^3}du=\frac{dx}{x}$; $\int\frac{du}{u^3}-\int\frac{du}{u}=\int\frac{dx}{x}$;

$-\frac{1}{2u^2}-\ln|u|=\ln|xc|$; $\ln|uCx|+\frac{1}{2u^2}=0$.

Після заміни $u=\frac{y}{x}$ дістаємо:

$\ln|yc|+\frac{1}{2}\frac{x^2}{y^2}=0$ - загальний інтеграл.

5. Рівняння, що зводяться до однорідних.

Такі рівняння мають загальний вигляд:

$$\frac{dy}{dx}=f(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}).$$

Розглянемо кілька окремих випадків.

1. Якщо $C=C_1=0$, то маємо рівняння з однорідною функцією і його можна розв'язати за допомогою підстановки $y=ux$ 2.Нехай $C\neq C_1\neq 0$.

Тоді рівняння зводиться до однорідного рівняння відносно змінних заміною $x=x_1+h$, $y=y_1+k$, де числа h і k знаходяться із системи:

$$\begin{cases} ah+bk+c=0, \\ a_1h+b_1k+c_1=0. \end{cases}$$

Така заміна можлива, якщо $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}\neq 0$,

2.Якщо $C\neq C_1=0$ але $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=0$.

Таке рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними підстановкою $z=ax+by$

Приклади. Розв'язати рівняння.

1. $(2x-y+3)dx+(x+y-1)dy+0$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x+y-3}{x+y-1}$$

тут a=-2, b=1, c=-3, a_1=1, b_2=1, c_1 =1.

$$\Delta=\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-3\neq 0$$

тому маємо випадок 2. Введемо нові зміни x_1, y_1 такі, що $x=x_1+h$, $y=y_1+k$. Маємо рівняння:

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{-2x_1+y_1-2h+k-3}{x_1+y_1+h+k-1}$$

Система для визначення h, k маємо вигляд:

$$\begin{cases}-2h+k-3=0,\\ h+k-1=0\end{cases} \Rightarrow \quad h=-\frac{2}{3} \quad k=\frac{5}{3}$$

тоді рівняння:

$\dfrac{dy_1}{dx_1}=\dfrac{-2x_1+y_1}{x_1+y_1}$ є однорідним

покладемо $y_1=ux_1$, тоді:

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{du}{dx_1}x_1+u; \qquad \frac{-2x_1+y_1}{x_1+y_1}=\frac{u-2}{u+1}$$

Підставимо знайдені результати в однорідне рівняння:

$$\frac{du}{dx_1}x_1+u=\frac{u-2}{u+1}.$$

Розділимо рівнянні:

$$\frac{du}{dx_1}x_1=\frac{u-2}{u+1}-u\,;\ \frac{du}{dx_1}x_1=-\frac{u^2+2}{u+1}\,;\ \frac{u+1}{u^2+2}du=-\frac{dx_1}{x_1}$$

Знайдемо інтеграл:

$$\int\frac{u+1}{u^2+2}du=\int\frac{udu}{u^2+2}+\int\frac{du}{u^2+2}=\frac{1}{2}\ln\left(u^2+2\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{u}{\sqrt{2}}$$

Отже: $\frac{1}{2}\ln\left(u^2+2\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{u}{\sqrt{2}}+\ln\left|x_1C\right|=0$,

але $u=\dfrac{y_1}{x_1}=\dfrac{y-k}{x-h}=\dfrac{y-\frac{5}{3}}{x+\frac{2}{3}}=\dfrac{3y-5}{3x+2}$

тоді:

$$\ln\left|C\left(x+\frac{2}{3}\right)\cdot\sqrt{(3y-5)^2(3x+2)^{-2}+2}\right|+\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{3y-5}{(3x+2)\sqrt{2}}=0$$

2. $(x+y+2)dx+(2x+2y-1)dy=0$.

$$y'=-\frac{x+y+2}{2x+2y-1} \text{ або } y'=-\frac{x+y+2}{-2x-2y+1}.$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & -2\end{vmatrix}=0.$$

Маємо випадок 3.

Покладемо $z=x+y$. Тоді $y=z-x$, $y'=z'-1$

Підставимо вирази для y і y′ в задане рівняння $y' = -\frac{x+y+2}{-2x-2y+1}$. Маємо:

$$z' - 1 = \frac{z+2}{-2z+1}.$$

Отримуємо рівняння з відокремлюваними змінними

$\frac{dz}{dx} = \frac{z+2}{-2z+1} + 1$, $\frac{dz}{dx} = \frac{-z+3}{-2z+1}$ або $\frac{dz}{dx} = \frac{z-3}{2z-1}$.

Відокремлюючи змінні та інтегруючи, маємо:

$$\frac{2z-1}{z-3}dz = dx, \ \int \frac{2z-1}{z-3}dz = x + C$$

$$2\int \frac{z}{z-3}dz - \int \frac{dz}{z-3} = x + C$$

$$2z + 6\ln|z-3| - \ln|z-3| = x + C$$

$$2z + 5\ln|z-3| = x + C$$

Враховуючи, що z=x+y, отримуємо загальний інтеграл:

$$x + 2y + 6\ln|x+y-3| = C$$

ЛЕКЦІЯ 4.

Тема лекції: Лінійні диференціальні рівняння.

План лекції:

1. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку : основні означення і поняття.
2. Метод підстановки (метод Бернуллі – Фур'є).
3. Метод варіації довільної сталої.
4. Метод інтегрувального множника.
5. Рівняння Бернуллі.
6. Рівняння Рікатті.

1. Якщо рівняння y′=f(x,y) можна записати у вигляді:

$$A(x)y' + B(x)y + E(x) = 0 \qquad (1)$$

або

$$y' + P(x)y = Q(x) \qquad (2)$$

де A(x), B(x), E(x), P(x), Q(x) — відомі функції і A(x)≠0, то таке рівняння, в якому невідома функція і її похідна входять у першому степені, називається лінійним. Форма запису рівняння (1) дістала назву **канонічної** . Перехід від (1) до (2) здійснюється діленням першого рівняння на A(x). Припущення A(x)=0 не має смислу, оскільки в цьому разі немає диференціального рівняння. Отже, завжди припускають, що A(x)≠0, тому рівняння (1) і (2) еквівалентні.

Якщо в (1) E(x)=0, а в (2) Q(x)=0, то рівняння (1) і (2) набирають вигляду:

$$A(x)y' + B(x)y = 0,$$

$$y' + P(x)y = 0$$

і називаються **лінійними однорідними рівняннями.**

Якщо ж E(x)≠0, Q(x)≠0, то рівняння (1) і (2) називаються **лінійними неоднорідними рівняннями.**

Розглянемо розв'язання лінійних однорідних рівнянь на прикладі рівняння $y' + P(x)y = 0$. Запишемо його у вигляді :

$$\frac{dy}{dx} = -P(x)y.$$

В цьому рівнянні змінні легко відокремити. Маємо:

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx$$

$$\ln|y| = -\int P(x)dx + \ln|c|, \ y = Ce^{-\int P(x)dx}$$

Для розв'язання неоднорідних рівнянь застосовують три методи: метод варіації довільної сталої, метод Бернуллі — Фур'є (метод підстановки), метод Ейлера.

2. Метод Бернуллі-Фур'є (метод підстановки).

Він полягає в тому, що розв'язок рівняння шукають у вигляді добутку двох функцій (підстановка Бернуллі) :

$$y = u(x) \cdot v(x)$$

де одну з них невідомих функцій можна взяти довільною (тотожно не рівною нулю), а інша визначається з умови задовольняння рівнянню $y' + P(x)y = Q(x)$.

Знаходячи похідну y′=vu′+v′u і підставляючи значення y та y′ у рівняння (2), дістанемо :

$$u'v + u[v' + P(x)v] = Q(x) \qquad \textbf{(3)}$$

Користуючись довільністю у виборі функції v(x), доберемо її так, щоб вираз у душках дорівнював нулю, в результаті чого рівняння (3) спроститься. Отже, маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} v' + P(x)v = 0 \\ u'v = Q(x) \end{cases}$$

Відокремлюючи в першому рівнянні системи змінні, знайдемо його загальний розв'язок:

$$\frac{dv}{dx} = -P(x)v; \ \frac{dv}{v} = -P(x)dx;$$

$$\ln|v| = -\int P(x)dx + \ln|C|;$$

$$v = C \cdot e^{-\int P(x)dx}$$

Приймаємо функцію v частинний розв'язок рівняння, поклавши у загальному розв'язку C=1, тобто:

$$v = e^{-\int P(x)dx}$$

Далі розв'язуємо друге рівняння системи, де функція v визначається попередньою формулою. Розв'язуючи це рівняння, знайдемо функцію u(x). Маємо:

$$\frac{du}{dx} e^{-\int P(x)dx} = Q(x); \ du = Q(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} dx;$$

$$u = \int Q(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} dx + C$$

т.я. y=uv, то загальний розв'язок рівняння:

$$y = uv = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left(\int Q(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} dx + C \right)$$

3. Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа).

Для лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

відповідне однорідне рівняння має вигляд:

$$y' + P(x)y = 0$$

і його загальний розв'язок визначається формулою:

$$y = C \cdot e^{-\int P(x)dx} \tag{4}$$

Згідно з методом варіації довільної сталої розв'язок рівняння (2) шукатимемо у вигляді:

$$y = C(x) \cdot e^{-\int P(x)dx}.$$

Цей вигляд отримується з формули (4), якщо в ній замінити сталу C на функцію C(x).

Знайдемо y′:

$$y' = C'(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} - C(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} \cdot P(x)$$

Підставимо y і y′ у вихідне рівняння. Одержимо для визначення невідомої функції C(x) диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$C(x) = Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}$$

Загальний розв'язок цього рівняння:

$$C(x) = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx + C,$$

де C – довільна стала.

Тоді маємо:

$$y = C(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} = \left(\int Q(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} dx + C\right) \cdot e^{-\int P(x)dx} dx$$

4. Метод Ейлера (метод інтегрувального множника).

Відповідно до цього методу, неоднорідне диференціальне рівняння:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

множиться зліва та справа на інтегрувальний множник:

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}.$$

В результаті зліва отримуємо похідну деякої функції, інтегрування якої зводить до цієї функції.

Дійсно,

$$y' \cdot e^{\int P(x)dx} + P(x) \cdot y \cdot e^{\int P(x)dx} = Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx},$$

$$\left(y \cdot e^{\int P(x)dx}\right) = Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}$$

Інтегруючи, маємо:

$$ye^{\int P(x)dx} = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx + C$$

<u>Приклади.</u> Розв'язати рівняння:

1. $y' - y = e^x$ — методом варіації довільної сталої.

Це лінійне неоднорідне рівняння. Відповідно однорідне:

$$y' - y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} - y = 0; \quad \frac{dy}{dx} = y; \quad \int \frac{dy}{y} = \int dx$$

$$\ln|y| = x + \ln|c|$$

$y = C \cdot e^x$ — загальний розв'язок однорідного рівняння.

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді:

$y = C(x) \cdot e^x$.

Знайдемо y′:

$y' = C'(x) \cdot e^x + C(x) \cdot e^x$

підставимо y і y′ у відповідне рівняння:

$C'(x) \cdot e^x + C(x) \cdot e^x - C(x) \cdot e^x = e^x$

$C'(x) \cdot e^x = e^x$

$C'(x) = 1$

$\underline{C(x) = x + C}$

Маємо:

$y = C(x) \cdot e^x = (x + C) \cdot e^x = x \cdot e^x + C \cdot e^x$

2. Методом Бернуллі.

Введемо заміну: $y = uv, \ \ y' = u'v + uv'$.

Підставимо y і y′ у вихідне рівняння:

$u'v + uv' - uv = x$

$u'v + u(v - v') = x$

Виберемо v таким чином, щоб (v′–v)=0.

Тоді маємо систему:

$$\begin{cases} v' - v = 0 \\ u'v = x \end{cases}$$

Розв'яжемо перше рівняння:

$v' - v = 0$

$\frac{dv}{dx} - v = 0$; $\frac{dv}{dx} = v$; $\int \frac{dv}{v} = \int dx$;

$\ln|v| = x$; $v = e^x$.

Підставимо $v = e^x$ в друге рівняння:

$u'v = x$

$\frac{du}{dx} e^x = x$; $\int du = \int x \cdot e^{-x} dx$

$$u = \begin{vmatrix} u_1 = x, & dv_1 = e^{-x} dx \\ du_1 = dx, & v_1 = e^{-x} \end{vmatrix}$$

$u = -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x} dx$

$u = -x \cdot e^{-x} - e^{-x} + C$

тоді:

$y = uv = \left(-x \cdot e^{-x} - -e^{-x} + C\right) \cdot e^{-x}$

$y = -x - 1 + C \cdot e^{-x}$

5. Рівняння Бернуллі.

Рівняння виду:

$$y'+P(x)y=Q(x)y^n$$

де n≠0, n≠1, називається **рівнянням Бернуллі**. Якщо n=0, то маємо лінійне рівняння. Якщо n=1, то об'єднавши P(x) з Q(x), дістанемо лінійне однорідне рівняння.

Розв'язок рівняння Бернуллі шукають за допомогою підстановки Бернуллі вигляду $y=uv$.

Приклад. Розв'язати рівняння.

$$y'+\frac{y}{x}=-xy^2.$$

Введемо заміну $y=uv$, $y'=u'v+uv'$:

$$u'v+uv'+\frac{uv}{x}=-x\cdot(uv)^2$$

$$u'v+u\left(v'+\frac{v}{x}\right)=-x\cdot(uv)^2$$

$$\begin{cases} v'+\dfrac{v}{x}=0, \\ u'v=-x\cdot(uv)^2 \end{cases}$$

$$v'+\frac{v}{x}=0;\ \frac{dv}{dx}=-\frac{v}{x};\ \frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x};\ \ln|v|=-\ln|x|;\ v=\frac{1}{x}$$

$$u'\cdot\frac{1}{x}=-x\left(u\cdot\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2$$

$$u'\cdot\frac{1}{x}=x\cdot u^2\cdot\frac{1}{x^2}$$

$$u'=-u^2$$

$$\frac{du}{dx}=-u^2;\ \int\frac{du}{u^2}=-\int dx;\ -\frac{1}{u}=-x+C$$

$$u=\frac{1}{x-C}$$

$$y=uv=\frac{1}{x-C}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x(x-C)}.$$

6.Рівняння Рікатті.

Рівнянням Рікатті називається рівняння виду:

$$y'+P(x)y+R(x)y^2=Q(x),$$

де P(x), R(x), Q(x) – задані і неперервні на деякому проміжку функції. Якщо P, R, Q, – сталі, то це рівняння інтегрується відокремленням змінних.

Коли R(x)=0, рівняння стає лінійним, а у випадку Q(x)=0 – рівнянням Бернуллі. У загальному випадку рівняння Ріккаті не інтегрується у квадратурах.
Якщо відомий частинний розв’язок $y_1=y_1(x)$ рівняння Ріккаті, то заміною $z=y_1+z$ рівняння Рікатті зводиться до рівняння Бернуллі.

<u>Приклад</u>. Розв’язати рівняння, враховуючи відомий частинний розв’язок $y_1(x)$:

$$y'=y^2-\frac{2}{x^2}, \; y_1(x)=\frac{1}{x}.$$

Дане рівняння є рівнянням Ріккаті, де:

P(x)=0, R(x)=1, $Q(x)=-\frac{2}{x^2}$

Так як $y_1(x)=\frac{1}{x}$ є частинним розв’язком цього рівняння, то заміна:

$$y=y_1+z=\frac{1}{x}+z.$$

$y'=-\frac{1}{x^2}+z'$. Підставимо y і y′ у задане рівняння:

$$-\frac{1}{x^2}+z'=\frac{1}{x^2}+2\frac{z}{x}+z^2-\frac{2}{x^2},$$

$z'-2\frac{z}{x}=z^2$ — рівняння Бернуллі.

Підстановка: $z=uv, \; z'=u'v+uv'$:

$$u'v+uv'-2\frac{uv}{x}=u^2v^2$$

$$u'v+u\left(v'-2\frac{v}{x}\right)=u^2v^2$$

$$\begin{cases} v'-2\frac{v}{x}=0, \\ u'v=u^2v^2; \end{cases}; \; \begin{cases} v'=2\frac{v}{x} \\ u'=u^2v \end{cases}$$

З першого рівняння:

$$\frac{dv}{v}=2\frac{dx}{x}, \; \ln|v|=2\ln|x|, \; v=x^2.$$

З другого рівняння:

$$\frac{du}{dx}=u^2v, \; \frac{du}{dx}=u^2x^2, \; \frac{du}{u^2}=x^2dx, \; -u^{-1}+C_1=\frac{x^3}{3}, \; u=-\frac{1}{\frac{x^3}{3}-C_1}=\frac{3}{3C_1-x^3}=\frac{3}{C-x^3}.$$

Отже:

$$z=uv=\left(\frac{3}{C-x^3}\right)x^2=\frac{3x^2}{C-x^3} \quad y=y_1+z=\frac{1}{x}+\frac{3x^2}{C-x^3}$$

ЛЕКЦІЯ 5.

Тема лекції: Рівняння у повних диференціалах. Диференціальні рівняння, нерозв'язні відносно похідної. Рівняння Лагранжа і Клеро.

План лекції:

1. Рівняння у повних диференціалах.
2. Знаходження розв'язку рівняння в повних диференціалах.
3. Знаходження розв'язку за допомогою криволінійного інтегралу.
4. Диференціальні рівняння, нерозв'язні відносно похідної.

1. Вираз вигляду: $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ називається **повним (точним) диференціалом,** якщо існує функція u(x,y) двох змінних, для якої

$$du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Рівняння:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \quad \textbf{(1)}$$

в якому ліва частина є повним диференціалом деякої функції u(x,y), називається рівнянням у **повних (точних) диференціалах**.

Так як:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = du(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy, \quad \textbf{(2),}$$

то

$$P(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}, \; Q(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Теорема. Для того, щоб вираз $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ був повним диференціалом, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Отже, якщо рівняння (1) є рівнянням у повних диференціалах, то воно може бути записане у вигляді $du(x,y) = 0$

Загальний інтеграл цього рівняння:

$u(x,y) = C$, де C – довільна стала.

Таким чином, задача інтегрування рівняння (1) зводиться до відшукання функції u(x,y), такої, що для неї ліва частина рівняння є повним диференціалом. Відшукання такої функції можна проводити двома способами.

2. Знаходження розв'язку рівняння у повних диференціалах.

Оскільки має місце співвідношення (2), матимемо:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)\ \textbf{(3)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)\ \textbf{(4)}$$

Інтегруючи (3) по x, отримаємо функцію u(x,y) з точністю до довільної сталої $\varphi(y)$, яка залежить від y:

$$u(x,y)=\int P(x,y)dx+\varphi(y)$$

Для визначення функції $\varphi(y)$ продиференціюємо отриману функцію u(x,y) по y і, враховуючи (2), матимемо:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\int P(x,y)dx\right]+\varphi'(y)=Q(x,y)$$

З цього рівняння визначаємо $\varphi'(y)$ і, інтегруючи, знаходимо $\varphi(y)$, а отже, і u(x,y).

3. Скористаємось криволінійним інтегралом другого роду для визначення функції u(x,y), для якої підінтегральний вираз є її повним диференціалом. У цьому випадку криволінійний інтеграл не залежить від шляху інтегрування. Взявши криволінійний інтеграл від функції

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

по будь-якому шляху від фіксованої точки (x_0,y_0) до точки із змінними координатами (x,y), отримаємо шукану функцію u(x,y):

$$u(x,y)=\int P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

Обчислення криволінійного інтеграла другого роду зводиться до обчислення визначеного інтеграла. При цьому за шлях інтегрування зручніше вибрати ламану, складену з двох відрізків, паралельних осям координат.

У такому випадку, згідно зі шляхом інтегрування:

$$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy$$

або:

$$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{y_0}^{y} P(x_0,y)dy+\int\limits_{x_0}^{x} Q(x,y)dx$$

Приклад Розв’язати рівняння.

$$(x+y+1)dx+(x-y^2+3)dy=0$$

Це рівняння у повних диференціалах, де:

$$P(x,y)=x+y+1,\quad Q(x,y)=x-y^2+3$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=1,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=1, \text{ отже } \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Тоді ліва частина заданого рівняння є повним диференціалом деякої функції u(x,y). Тоді рівняння зводиться до вигляду du(x,y)=0, де u(x,y) – деяка функція, яку треба визначити.

Загальним розв'язком цього рівняння є u(x,y)=C

Оскільки $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$,

З заданого рівняння маємо :

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx=x+y+1,\ \frac{\partial u}{\partial y}dx=x-y^2+3.$$

Інтегруємо перше з цих рівнянь по x:

$$u(x,y)=\int(x+y+1)dx=\frac{x^2}{2}+yx+x+\varphi(y).$$

Далі диференціюємо отриману функцію по y і прирівнюємо заданому виразу для $\frac{\partial u}{\partial y}$:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x+\varphi'(y)=x-y^2+3$$

Звідси:

$$\varphi(y)=\frac{-y^3}{3}+3y+C$$

Отже:

$$u(x,y)=\frac{x^2}{2}+yx+x-\frac{y^3}{3}+3y+C$$

Загальний інтеграл:

$$\frac{x^2}{2}+yx+x-\frac{y^3}{3}+3y+C$$

4. Диференціальні рівняння, нерозв'язні відносно похідної.

Нехай диференціальне рівняння, нерозв'язне відносно похідної $F(x,y,y')=0$, розв'язне або відносно шуканої функції $y=f(x,y')$, або відносно аргументу $x=f(y,y')$. Тоді воно інтегрується введенням параметра $p=y'$. Ці рівняння тоді переходять в алгебраїчні рівняння, диференціюючи які відповідно по x або y, отримуємо системи рівнянь:

$$\begin{cases} y=f(x,p) \\ P=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial P}\cdot\frac{\partial P}{\partial x} \end{cases} \text{ або: } \begin{cases} x=f(y,p) \\ \frac{1}{P}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial P}\cdot\frac{\partial P}{\partial y} \end{cases}$$

З цих систем знаходяться відповідно загальні розв'язки рівнянь в явному або параметричному вигляді.

Рівняння виду:

$y = x \cdot \varphi(y') + \Psi(y')$

де φ і Ψ – відомі функції, називається **рівнянням Лагранжа**.

Якщо $\varphi(y') = y'$, рівняння набирає вигляду:

$y = xy' + \Psi(y')$

і називається **рівнянням Клеро.**

Рівняння Лагранжа розв’язується за допомогою параметру $p = y'$. Тоді рівняння Лагранжа:

$y = x \cdot \varphi(y') + \Psi(y')$ запишеться у вигляді:

$y = x\varphi(P) + \Psi(P)$

Диференціюючи по x, дістанемо:

$$P = \varphi(P) + (x\varphi'(P) + \Psi'(P))\frac{dP}{dx}$$

або:

$$P - \varphi(P) = (x\varphi'(P) + \Psi'(P))\frac{dP}{dx}$$

отже:

$$(P - \varphi(P))\frac{dx}{dP} = x\varphi'(P) + \Psi'(P)$$

це рівняння є лінійним відносно невідомої функції x=x(P). Розв’язавши його, знаходимо загальний розв’язок x=x(P,C).

ЛЕКЦІЯ 6.

Тема лекції: Диференціальні рівняння вищих порядків. Основні означення і поняття. Рівняння, що допускають зниження порядку.

План лекції:

1. Диференціальні рівняння n-го порядку: основні означення і поняття..
2. Рівняння, що допускають зниження порядку.

1. В загальному вигляді **рівняння n-го порядку** має вигляд
$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})=0$,
Таке рівняння називають **рівнянням у неявному вигляді.**
Якщо його можна розв'язати відносно $y^{(n)}$, тобто рівняння матиме вигляд:
$y^{(n)}=f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, **(1)**
то таке рівняння називають **рівнянням у явному вигляді** і для нього виконується така теорема.

Теорема (Коші). Якщо в рівнянні (1) функція f та її частинні похідні y, y', …, $y^{(n-1)}$ неперервні в області D, яка містить значення x_0, y_0', …, $y_0^{(n-1)}$, то існує єдиний розв'язок, який задовольняє початковим умовам

$y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0)= y_0^{(n-1)}$. **(2)**

Задача знаходження розв'язків (1) з умовами (2) називається **задачею Коші.**

Загальним розв'язком (інтегралом) називається функція $y=\varphi(x, C_1,\ldots,C_n)\Phi(x, y, C_1,\ldots,C_n)=0$, яка задовольняє умовам:

1) вона приводить рівняння при довільних $C_1, C_2, \ldots, C_n$ до тотожності;
2) при довільних умовах (2) існують такі $C_i=C_{i0}$ $i=\overline{1,n}$, при яких ці умови виконуються.

Частинний розв'язок (інтеграл) одержується з загального при $C_i=C_{i0}$ $i=\overline{1,n}$.

Наявність в загальному розв'язку (інтегралі) n довільних сталих очевидна: щоб від $y^{(n)}$ перейти до y, необхідно інтегрувати n раз, одержуючи на кожному кроці довільну сталу.

2. Рівняння, що допускають зниження порядку.

В деяких випадках порядок рівняння може бути знижений, наприклад, з другого до першого, а останнє рівняння може бути проінтегроване.

1. Рівняння вигляду
$y^{(n)}=f(x)$.

Воно може бути розв'язане за допомогою n-кратного інтегрування.

2. **Рівняння вигляду**
$F(x, y^{(n)})=0$.

Якщо це рівняння можна розв'язати відносно $y^{(n)}$, то маємо вже розглянутий випадок рівняння $y^{(n)}=f(x)$.

Припустимо, що рівняння $F(x, y^{(n)})=0$ можна розв'язати відносно x: $x=f(y^{(n)})$.

Тоді підстановка $y^{(n)}=t$ знову зводить його до рівняння $y^{(n)}=f(x)$.

3. **Рівняння вигляду**
$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)})=0$,

що не містить шуканої функції та її похідних до (k-1)-го порядку включно. В цьому випадку порядок рівняння знижується до (n-k) заміною змінних $y^{(k)}=p(x)$.

4. **Рівняння вигляду**
$F(y, y', \dots, y^{(n)})=0$,

що не містить явно змінної x.

Підстановкою $y'=p(y)$ порядок рівняння знижується на одиницю. Маємо:

$$y'=P, y''=p\cdot p', y'''=p^2\cdot p''+(p')^2\cdot p, \dots$$

5. **Рівняння вигляду**
$F(x, y, y', \dots, y^{(n)})=0$,

ліва частина якого є повною похідною по x від деякої функції $F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$. Тоді рівняння можна записати у вигляді

$$\frac{d}{dx}\Phi(x, y, y', \quad , y^{(n)})=0$$

Інтегруючи по x, отримуємо рівняння

$$\Phi(x, y, y', \quad , y^{(n)})=C,$$

порядок якого на одиницю нижче порядку вихідного рівняння.

6. **Рівняння вигляду**
$F(x, y, y', \dots, y^{(n)})=0$,

де ліва частина є однорідною функцією n-го виміру відносно $y, y', \dots, y^n$.

Порядок рівняння можна знизити, застосувавши заміну $y'=zy$, де $z=z(x)$.

<u>Приклади.</u> Розв'язати рівняння.

1. $y''=\sin(kx)$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.
   Рівняння першого типу.

   Після першого інтегрування маємо:

$y' = -\frac{1}{k}\cos kx + C_1.$

Використовуючи початкову умову $y'(0) = 1$, знаходимо C_1:

$1 = -\frac{1}{k} + C_1,\ C_1 = \frac{k+1}{k}$

Тепер рівняння має вигляд:

$y' = \frac{1}{k}(k + 1 - \cos kx)$

Інтегруючи ще раз, дістаємо:

$y = \frac{1}{k}((k+1)x - \frac{1}{k}\sin kx) + C_2.$

Підставимо початкову умову y(0)=0, знаходимо C_2=0, тоді:

$y = \frac{1}{k}((k+1)x - \frac{1}{k}\sin kx)$

2. $e^{y''} + y'' = x$

Рівняння другого типу, розв'язане відносно x.

Нехай $y'' = t$, тоді

$x = e^t + t, \frac{d}{dx}(y') = t, dy' = tdx$, але $dx = (e^t + 1)dt.$

Тепер $dy' = t(e^t + 1)dt.$

$$y' = \int_{t_0}^{t} te^t dt + \int_{t_0}^{t} tdt = te^t - e^t + \frac{t^2}{2} + C^1,$$

$$y' = (t-1)e^t + \frac{t^2}{2} + C_1.$$

Інтегруючи ще раз, дістанемо:

$$dy = (et(t-1) + \frac{t^2}{2} + C_1)(e^t + 1)dt$$

$$y = \int (te^{2t} - e^{2t} + \frac{t^2}{2}e^t + C_1 e^t + te^t - e^t + \frac{t^2}{2} + C_1)dt$$

Розв'язком системи є:

$y = (\frac{t}{2} - \frac{3}{4})e^{2t} + (\frac{t^2}{2} - 1 + C_1)e^t + \frac{t^3}{6} + C_1 t + C_2.$

3. $y'' + \frac{1}{x}y' = 0.$

Рівняння, що не містить явно функції y.

Нехай $y' = p$, $y'' = p' = \frac{dp}{dx}$, тоді:

$\frac{dp}{dx} - \frac{p}{x} = 0$; $\frac{dp}{dx} = -\frac{p}{x}$; $\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}$; $e_n|p| = e_n|C_1 x|$;

$p=(C_1-x)^{-1}$; $p=\dfrac{1}{C_1x}$; $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{C_1x}$; $dy=\dfrac{dx}{C_1x}$; $y=\dfrac{1}{C_1}e_n\,|C_2x|$.

4. $y^3y''-a^2=0$.

Рівняння не містить явно змінної x.

$y'^t\ p(y)=p$, $y''=p\cdot p'$:

$y^3p\dfrac{dp}{dy}-a^2=0,\ p\dfrac{dp}{dy}=a^2y^{-3}$

$pdp=a^2y^{-3}dy$

Після інтегрування маємо:

$\dfrac{p^2}{2}=-\dfrac{a^2y^{-2}}{2}+C_1$, $p^2=2C_1-a^2y^{-2}$; $p=\sqrt{2C_1-a^2y^{-2}}$.

$p=\sqrt{C-a^2y^{-2}}$, $C=2C_1$.

Замінимо р на $\dfrac{dy}{dx}$.

$\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{C-a^2y^{-2}}$, $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{\sqrt{Ca^2y^{-2}}}{ydy}$, $\dfrac{ydy}{\sqrt{Ca^2y^{-2}}}=dx$.

$\int\dfrac{ydy}{\sqrt{Ca^2y^{-2}}}=x+C_2$; $\int\dfrac{ydy}{\sqrt{Ca^2y^{-2}}}=\dfrac{1}{C}\sqrt{Ca^2y^{-2}}$.

$\dfrac{1}{C}\sqrt{Ca^2y^{-2}}=x+C_2$.

5. $(y'')^2=y'$.

Не містить явно ні x, ні y.

Заміна: $y'=p,\ \ y''=\dfrac{dp}{dy}=p'$.

$(p')^2=p,\dfrac{dp}{dx}=\sqrt{p},\ p^{0.5}dp=dx,2p^{0.5}=x+C_1$;

$p=(\dfrac{x+C^1}{2})^2$, $\dfrac{dy}{dx}=(\dfrac{x+C^1}{2})^2$, $dy=0.25(x+C_1)^2dx$,

$y=\dfrac{1}{4}\int(x^2+2xC_1+C_1{}^2)dx$,

$y=\dfrac{1}{4}(\dfrac{x^3}{3}+x^2C_1+C_1{}^2x)+C_2$,

$y=\dfrac{x^3}{12}+\dfrac{x^2C_1}{4}+\dfrac{C_1{}^2x}{4}+C_2$.

<u>ЛЕКЦІЯ 7.</u>

<u>Тема лекції:</u> Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків. Загальний та частинний розв’язки. Лінійні однорідні диференціальні рівняння вищих порядків. Визначник Вроньського. Фундаментальна система розв’язків.

<u>План лекції:</u>

1. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків.
2. Розв’язки лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків. Лінійна залежність та незалежність функцій.
3. Визначник Вроньського.
4. Фундаментальна система розв’язків.

1. **Лінійним рівнянням n-го порядку** називається рівняння виду:

$$b_0(x)y^{(n)}+b_1(x)\,y^{(n-1)}+\ldots+b_n(x)y=Q(x), \qquad \textbf{(1)}$$

де $b_0(x), b_1(x), ..., b_n(x), Q(x)$ – відомі функції.

Тобто, лінійне рівняння – це рівняння, що містить шукану функцію і всі її похідні в першому степені.

Коефіцієнт $b_0(x)$ в області свого визначення не повинен дорівнювати нулю, оскільки тоді рівняння не буде рівнянням n-го порядку. Тому рівняння (1) можна поділити на $b_0(x)$. Замінивши

$$\frac{b_1(x)}{b_0(x)}=a_1(x),\ \frac{b_2(x)}{b_0(x)}=a_2(x),\ \frac{b_n(x)}{b_0(x)}=a_n(x),\quad \frac{Q(x)}{b_0(x)}=f(x),$$

дістанемо рівняння:

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+a_n(x)y=f(x), \qquad \textbf{(2)}$$

<u>Теорема.</u> Якщо коефіцієнти $a_1(x), a_2(x), ..., a_n(x)$ і функція $f(x)$ рівняння (2) неперервні на інтервалі (a,b), то існує один і тільки один розв’язок $y=f(x)$, визначений і неперервний в (a,b). Він задовольняє рівняння і будь-яку систему початкових умов при будь-якому початковому значенні x_0, взятому з інтервалу (a,b).

Якщо $Q(x)=0$, або $f(x)=0$, то рівняння називається **однорідним**, в протилежному випадку – **неоднорідним**.

Вираз $L(y)=y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)y$ називається **лінійним диференціальним оператором від функції y.**

Тоді рівняння (2) приймає вигляд:

$L(y)=f(x)$,

а у випадку однорідного рівняння маємо:

$$L(y)=0, \text{ або: } y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+a_n(x)y=0, \qquad \textbf{(3)}$$

2. <u>Теорема.</u> Якщо y_1 і y_2 – частинні розв'язки рівняння (3), то C_1y_1 і C_1y_2 також є розв'язками цього рівняння.

<u>Теорема.</u> Якщо y_1 і y_2 – частинні розв'язки рівняння (3), то їхня сума $y_1 + y_2$, а також їхня лінійна комбінація $C_1y_1 + C_1y_2$ є розв'язками цього рівняння.

В загальному вигляді: якщо функції $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ - частинні розв'язки рівняння (3), то їхня лінійна комбінація

$y = C_1y_1(x)+ C_2y_2(x)+\ldots+ C_ny_n(x)$ **(4)**

також є розв'язком рівняння.

Постає питання: які потрібно накласти на функції $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ умови, для того, щоб рівняння (4) було розв'язком рівняння (3)? Для відповіді на це питання введемо поняття лінійно незалежної системи функцій.

Система функцій $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$, визначена в інтервалі (a,b), називається **лінійно залежною**, якщо існують відмінні від нуля сталі $\alpha_i\,(i=\overline{1,n})$ такі, що рівність

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) = 0$$

виконується для всіх $x \in (a,b)$.

Якщо ж відмінних від нуля α_i, при яких би виконувалась дана рівність, немає, то сукупність функцій $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ називається **лінійно незалежною.**

<u>Приклади.</u>

1. Система функцій $z_1=\sin^2 x$, $z_2=\cos^2 x$, $z_3=1$ є лінійно залежною у проміжку $(-\infty,\infty)$, оскільки при $\alpha_1=1$, $\alpha_2=1$, $\alpha_3=-1$ рівність

$\sin^2 x + \cos^2 x - 1= 0$

виконується для будь-якого $x \in (-\infty,\infty)$.

2. Система функцій $y_1=\sin x$, $y_2=\cos x$ є лінійно незалежною у проміжку $(-\infty,\infty)$, оскільки рівність

$C_1\sin x + C_2\cos x = 0$

виконується для всіх x лише при $C_1=C_2=0$. Дійсно

$C_1\sin x + C_2\cos x = 0$

$\frac{C_1}{C_2} = -tgx$ - залежить від x, а нам треба, щоб це відношення від не залежало від x.

3. Система функцій $y_1=e^x$, $y_2= 2e^x$ є лінійно залежною для $x \in (-\infty,\infty)$.

3. Визначник виду:

$$W(x)=W(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

називається **визначником Вроньського**.

Це функціональний визначник, оскільки він залежить від x.

__**Теорема.**__ Якщо функції $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ лінійно залежні на інтервалі (a,b), то визначник Вроньського дорівнює нулю.

__**Наслідок.**__ Дві функції y_1 і y_2 є лінійно залежними, якщо $\frac{y_1}{y_2}=const$, і лінійно незалежними, якщо $\frac{y_1}{y_2}\neq const$.

__**Теорема.**__ Якщо розв'язки $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ лінійного однорідного рівняння (3) є лінійно незалежними у деякому інтервалі (a,b), а коефіцієнти рівняння неперервні, то визначник Вроньського на цьому інтервалі ніде не перетворюється на нуль.

4. Будь-яка система з n лінійно незалежних частинних розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку, визначених в інтервалі (a,b) називається **фундаментальною системою**.

__**Теорема.**__ Якщо y_1, y_2, …, y_n – фундаментальна система розв'язків лінійного однорідного рівняння, то $y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n$ є загальним розв'язком однорідного рівняння.

Зауваження.

1. Максимальне число лінійно незалежних частинних розв'язків лінійного однорідного рівняння (3) з неперервними в (a,b) коефіцієнтами $a_1(x)$, $a_2(x)$, …, $a_n(x)$ дорівнює порядку рівняння.
2. Незалежно від початкових умов усі інші розв'язки рівняння є лінійною комбінацією лінійно незалежних частинних розв'язків.

__Приклад.__ Розв'язати рівняння $z''-z=0$.

Його частинними розв'язками є $z_1=e^x$, $z_2=e^{-x}$.

Визначимо, чи утворюють ці розв'язки фундаментальну систему. Для цього складемо визначник Вроньського:

$$W(z_1, z_2)=\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix}=-e^0-e^0=-2\neq 0.$$

Отже, система розв'язків z_1 і z_2 фундаментальна. Розв'язок має вигляд: $z=C_1e^x+C_2e^{-x}$.

ЛЕКЦІЯ 8.

Тема лекції: Лінійні однорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами.

План лекції:

1. Лінійні однорідні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.
2. Лінійні однорідні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

1. Розглянемо рівняння:

$y''+py'+qy=0,$ p,q – сталі, тобто p,q $\in$ Q **(1)**

Це **лінійне однорідне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами**. Його розв'язок шукатимемо у вигляді:

$y=e^{kx}$, де k – невідома стала, $x\in(-\infty,\infty)$.

Вибір такого розв'язку ґрунтується на тому, що функція $y=e^{kx}$, визначена для $x\in(-\infty,\infty)$, має похідну будь-якого порядку і ніде в нуль не перетворюється. Підставляючи $y=e^{kx}$ в рівняннях, знаходимо:

$e^{kx}(k^2+pk+q)=0$.

Так як $e^{kx}\neq 0$, то розв'язок $y=e^{kx}$ задовольнятиме рівняння, якщо:

$k^2+pk+q=0$.

Це **характеристичне рівняння**.

Корені характеристичного рівняння:

$$k_{1,2}=\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}.$$

Маємо три випадки:

1. Нехай k_1 і k_2 – дійсні різні корені, $k_1\neq k_2$, тоді:

$y_1=e^{k_1x}$, $y_2=e^{k_2x}$, $x\in(-\infty,\infty)$.

Загальний розв'язок рівняння в цьому випадку має вигляд:

$$y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$$

2. Нехай k_1 і k_2 – комплексно-спряжені корені:

$k_1=\alpha+i\beta,\ k_2=\alpha-i\beta,\ i=\sqrt{-1},$

тоді:

$e^{\beta ix}=\cos\beta x+i\sin\beta x, e^{-\beta ix}=\cos\beta x-i\sin\beta x,$ $y_1=e^{\alpha x}e^{\beta ix}$, $y_2=e^{\alpha x}e^{-\beta ix}$

За формулою Ейлера $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$ маємо:

$e^{\beta ix}=\cos\beta x+i\sin\beta x,$ $e^{-\beta ix}=\cos\beta x-i\sin\beta x$,

$y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x+ie^{\alpha x}\sin\beta x=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)$

$y_2=e^{\alpha x}\cos\beta x-ie^{\alpha x}\sin\beta x=e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x)$

<u>Лема.</u> Якщо функція $y = v(x) + iu(x)$ є розв'язком лінійного рівняння n-го порядку, то v і u також є розв'язком цього рівняння.

На підставі цієї леми візьмемо за частинні розв'язки $\overline{y_1} = e^{\alpha x}\cos\beta x$ і $\overline{y_2} = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Ці розв'язки є лінійно незалежними. Тоді загальний розв'язок рівняння (1) запишемо у вигляді:

$$y = C_1\overline{y_1} + C_2\overline{y_2}\,,$$
$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2 i\sin\beta x).$$

3. Нехай $k_1 = k_2 = k$, тоді $y_1 = e^{kx}$. Другий розв'язок шукатимемо у формі $y_2 = u(x)e^{kx}$, вважаючи $u(x)$ невідомою. Тоді:

$$y_2' = u'(x)e^{kx} + ku(x)e^{kx},$$
$$y_2'' = u''(x)e^{kx} + 2u(x)ke^{kx} + k^2u(x)e^{kx},$$

Внесемо ці вирази в рівняння (1):

$$(u' + 2u'k + uk^2)e^{kx} + p(u' + uk)e^{kx} + que^{kx} = 0,$$

Після перетворення маємо:

$$u'' + (2k + p)u' = 0.$$

За теоремою Вієта: $2k + p = 0$, тому

$$u''(x) = 0,\ \ u(x) = Ax + B.$$

Поклавши A=1, B=0, дістаємо $y_2 = xe^{kx}$. Розв'язки $y_1 = e^{kx}$ і $y_2 = xe^{kx}$ утворюють фундаментальну систему. Загальний розв'язок має вигляд:

$$y = C_1e^{kx} + C_2xe^{kx} = e^{kx}(C_1 + C_2x).$$

<u>Приклади.</u>

1. $y'' - 7y' + 12y = 0.$

$$y = e^{kx},\ k^2 - 7k + 12 = 0,\ k_1 = 3,\ k_2 = 4.$$

Загальний розв'язок рівняння:

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{4x}$$

2. $y'' - 4y' + 13y = 0.\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

$$y = e^{kx},\ k^2 - 4k + 13 = 0,\ k_1 = 2 + 3i,\ k_2 = 2 - 3i.$$
$$y_1 = e^{2x}\cos 3x,\ y_2 = e^{2x}\sin 3x.$$

Загальний розв'язок:

$$y = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$$

Знайдемо C_1 і C_2. З умови y(0)=1 маємо $C_1=1$. Для використання другої умови знайдемо першу похідну від розв'язку:

$$y' = 2e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x) + 3e^{2x}(-C_1\cos 3x + C_2\sin 3x).$$

Використовуючи умову $y'(0) = 0$, дістанемо:

$2C_1+3C_2=0$, $C_2=-2/3C_1$, $C_2=-2/3$, $C_1=1$.

Розв'язок задачі Коші запишемо у вигляді:

$$y = e^{2x}(\cos 3x - \frac{2}{3}\sin 3x).$$

3. $y''+2y'+y=0$**.**

Характеристичне рівняння: $k^2+2k+1=0$, $k_1=k_2=-1$.

Частинні розв'язки: $y_1=e^{-x}, y_2=xe^{-x}$.

Загальний розв'язок: $y=e^{-x}(C_1+C_2x)$.

2. Загальний вигляд **лінійного однорідного рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами**

$y^{(n)}+a_1\, y^{(n-1)}+\ldots+a_n\, y=0,$ **(2)**

Фундаментальну систему розв'язків рівняння (2) шукатимемо у формі: $y=e^{kx}$, де k – невідоме, $x\in(-\infty,\infty)$.

Підставляючи $y=e^{kx}$ в рівняння (2), одержуємо рівняння для визначення k:

$k^{(n)}+a_1\, k^{(n-1)}+a_2\, k^{(n-2)}+\ldots+a_n=0.$

Це рівняння називається **характеристичним**. Отже, задача звелась до визначення коренів цього рівняння. Серед коренів рівняння можуть бути такі:

1. Всі корені характеристичного рівняння $k_1, k_2, \ldots, k_n$ дійсні і різні. Тоді фундаментальну систему утворюють функції, лінійно незалежні на інтервалі $(-\infty,\infty)$:

$$y=\sum_{i=1}^{n} C_1 y_1(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{k_1 x}.$$

2. Серед коренів характеристичного рівняння крім дійсних є і комплексно-спряжені, але немає кратних. Нехай $k_1, k_2, \ldots, k_n$ – дійсні корені і $k_e=\alpha_e \pm i\beta_e$, 2e=m+1, m+2, …, n. Тоді дійсним кореням відповідають частинні розв'язки.

   Система частинних розв'язків $e^{k_1 x}$, e^{k2x}, ..., e^{kmx}:

$$e^{\alpha_{m+1}}x\cos\beta_{m+1}x, e^{\alpha_{m+1}}x\sin\beta_{m+1}x, e^{\alpha_{m+2}}x\cos\beta_{m+2}x, e^{\alpha_{m+2}}x\sin\beta_{m+2}x, \ldots$$

утворює лінійно незалежну систему функцій. Загальний розв'язок у цьому разі буде лінійною комбінацією вказаних функцій.

3. Серед вказаних коренів характеристичного рівняння є кратні. Нехай k_i – дійсний корінь крайності m. Тоді цьому кореню відповідають m частинних розв'язків виду

$$e^{k_i x}, xe^{k_i x}, x^2 e^{k_i x}, \ldots, x^{m-1} e^{k_i x},$$

Якщо серед коренів характеристичного рівняння є комплексні, то кожній парі комплексно-спряжених коренів крайності μ відповідають 2μ частинних розв'язків.

<u>Приклад.</u>

$y'''-y''+2y'+4y=0.$

Корені характеристичного рівняння:

k_1=-1, $k_{2,3}$=-1$\pm$i$\sqrt{3}$.

Частинні розв’язки:

$y_1=e^{-x}, y_2=e^x\cos\sqrt{3}x, y3=e\sin\sqrt{3}x.$

Загальний розв’язок:

$y=C_1e^{-x}+e^x(C_2\cos\sqrt{3}x+C_3\sin\sqrt{3}x).$

ЛЕКЦІЯ 9.

Тема лекції: Неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку. Метод довільних сталих. Неоднорідні ДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

План лекції:

1.Лінійні неоднорідні рівняння другого порядку.
2. Метод варіації довільних сталих.
3. Неоднорідні рівняння n-го порядку.
4. Неоднорідні лінійні рівняння другого порядку зі спеціальною правою частиною.
5. Неоднорідні лінійні рівняння n-го порядку зі спеціальною правою частиною.

1. Розглянемо **лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку:**

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad \textbf{(1)}$$

Відповідне йому однорідне рівняння:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad \textbf{(2)}$$

Теорема. Загальний розв'язок у рівнянні (1) має вигляд:

$$y = y_0 + y_r$$

де y_0 – загальний розв'язок рівняння (2), а y_r – частинний (довільний) розв'язок (1).

Теорема. Якщо в диференціальному рівнянні (1) $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ то $y_r = y_{1r} + y_{2r}$, де y_{ir}, i=1,2 – розв'язки рівнянь

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_i(x), i = 1,2$$

2. **Метод варіації довільних сталих**

Згідно цього методу загальний розв'язок рівняння (1) шукаємо в тому ж вигляді, що і ДР (2): $y = c_1y_1 + c_2y_2$,

Де $c_1=c_1(x)$, $c_2=c_2(x)$ – деякі функції.

Зауважимо, що розв'язок $y=y_0+y_r$ містить три функції, тоді як розв'язок $y=c_1(x)y_1+c_2(x)y_2$ – чотири, тобто одержуємо додаткову ступінь свободи. Цей засіб нагадує підстановку Бернуллі y=uv для лінійних ДУ-1

З рівності $y=c_1y_1+c_2y_2$ маємо:

$$y' = c_1y_1' + c_2y_2' + c_1'y_1 + c_2'y_2$$

Використовуючи додаткову ступінь свободи, приймемо:

$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$

тобто $y' = c_1 y_1' + c_2 y_2'$, $y'' = c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + c_1 y_1' + c_2 y_2'$

підставляючи y, y', y'' в (1), знаходимо:

$c_1(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + c_2(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2) + c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x)$

Оскільки y_1 і y_2 – розв'язки (2), то фактично після підстановки маємо:

$c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x)$

Система:

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x) \end{cases} \quad \textbf{(3)}$$

дає можливість знайти c_1' і c_2', а потім і c_1 і c_2.

Приклад. Розв'язати рівняння:

$$y'' - \frac{y'}{x} = x$$

Відповідне однорідне: $y'' - \frac{y'}{x} = 0$, або:

$\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x}$. Двічі інтегруючи, одержимо:

$y = c_1 x^2 + c_2$

Таку ж форму має і загальний розв'язок цього рівняння при $c_1=c_1(x)$ і $c_2=c_2(x)$. Для знаходження розв'язку використаємо систему (3)

$y_1 = x^2, y_2 = 1, y_1' = 2x, y_2' = 0$, Тоді:

$$\begin{cases} c_1' x + c_2' = 0 \\ 2c_1' x = 0 \end{cases}$$

Звідси $c_1' = \frac{1}{2}$, $c_1 = \frac{x}{2} + c_1^*$, $c_2' = -\frac{x^2}{2}$, $c_2 = -\frac{x^3}{6} + c_2^*$

Одержуємо: $y = c_1^* x^2 + c_2^* - \frac{x^3}{6}$

3. Для **неоднорідних рівнянь n-го порядку** виду:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x)$$

загальний розв'язок має такий же вигляд, як і для ДР (1). При цьому застосовується метод варіації довільних сталих, коли загальний розв'язок пишуть у вигляді:

$$y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 + \ldots + c_n(x)y_n$$

і користуються системою

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 + \ldots + c_n' y_n = 0, \\ \ldots \\ c_1' y_1^{(n-2)} + c_2' y_2^{(n-2)} + \ldots + c_n' y_n^{(n-2)} = 0, \\ c_1' y_1^{(n-1)} + c_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + c_n' y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

4. Розглянемо **лінійне неоднорідне рівняння другого порядку** :
$y'' + py' + qy = f(x), \quad p,q \in R$
і відповідне йому однорідне рівняння
$y'' + py' + qy = 0$

Загальний розв'язок рівняння (1) має вигляд $y = y_0 + y_r$. Розв'язок y_0 знаходимо за допомогою характеристичного рівняння. Якщо f(x) має спеціальний вигляд, то y_r знаходиться за допомогою метода невизначених коефіцієнтів.

Розглянемо випадки спеціальних виглядів функції f(x) – правої частини рівняння (1)

1. $f(x) = Q_s(x) \cdot e^{\alpha x} = (A_0 x^S + A_1 x^{S-1} + ... A_S)e^{\alpha x}$, де
$Q_S(x)$ – многочлен степеня S з заданими коефіцієнтами.
Якщо:
1) α не є коренем характеристичного рівняння відповідного однорідного рівняння, то частинний розв'язок y_r шукаємо у вигляді:
$y_r = P_s(x)e^{\alpha x} = (B_0 x^S + B_1 x^{S-1} + ... B_s)e^{\alpha x}$,
де $P_s(x)$ – многочлен степеня S з невизначеними коефіцієнтами;
2) α – однократний (простий) корінь характеристичного рівняння, то частинний розв'язок y_r шукаємо у вигляді:
$y_r = x \cdot P_s(x)e^{\alpha x} = x(B_0 x^S + B_1 x^{S-1} + ... B_s)e^{\alpha x}$
3) α – двократний корінь характеристичного рівняння, то частинний розв'язок y_r шукаємо у вигляді:
$y_r = x^2 \cdot P_s(x)e^{\alpha x} = x^2(B_0 x^S + B_1 x^{S-1} + ... B_s)e^{\alpha x}$

2. $f(x) = e^{\alpha x}(Q_{s1}(x)\cos\beta x + P_{s2}(x)\sin\beta x)$
де $Q_{s1}(x), P_{s2}(x)$ – многочлени степенів S_1, S_2 відповідно з заданими коефіцієнтами, max $(S_1,S_2)=S$.
Якщо:
1) $\alpha \pm \beta$ не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок y_r шукаємо у вигляді:
$y_r = e^{\alpha x}(U_s(x)\cos\beta x + V_s(x)\sin\beta x)$, де
$U_s(x), V_s(x)$ – многочлени степеня S з невизначеними коефіцієнтами;
2) $\alpha \pm \beta$ є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок y_r шукаємо у вигляді:
$y_r = xe^{\alpha x}(U_s(x)\cos\beta x + V_s(x)\sin\beta x)$

5. Для **лінійного неоднорідного диференціального рівняння n-го порядку** зі сталими коефіцієнтами

$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$

метод підбору вигляду частинного розв'язку за виглядом функції f(x) розглядає такі випадки:

1. $f(x) = Q_s(x) \cdot e^{\alpha x} = (A_0 x^S + A_1 x^{S-1} + \ldots A_S) e^{\alpha x}$

Якщо:

1) α не є коренем характеристичного рівняння відповідного однорідного рівняння, то частинний розв'язок y_r шукаємо у вигляді:

$y_r = P_s(x) e^{\alpha x} = (B_0 x^S + B_1 x^{S-1} + \ldots B_s) e^{\alpha x}$,

2) α – r- кратний корінь характеристичного рівняння, то частинний розв'язок y_r шукаємо у вигляді:

$y_r = x^r \cdot P_s(x) e^{\alpha x} = x^r (B_0 x^S + B_1 x^{S-1} + \ldots B_s) e^{\alpha x}$

Невідомі числа B_0, $B_1, \ldots, B_s$ відшукують методом невизначених коефіцієнтів, тобто: підставляють $y_r, y_r', \ldots, y_r^{(n)}$ у диференціальне рівняння, прирівнюють коефіцієнти при однакових степенях x. Розв'язки отриманої системи рівнянь – числа B_0, $B_1, \ldots, B_s$

2. $f(x) = e^{\alpha x} (Q_{s1}(x) \cos \beta x + P_{s2}(x) \sin \beta x)$

де $Q_{s1}(x), P_{s2}(x)$ – многочлени степенів S_1, S_2 відповідно з заданими коефіцієнтами, max $(S_1, S_2) = S$.

Якщо $\alpha \pm \beta$ не співпадає ні з одним коренем характеристичного рівняння, то y_r шукаємо у вигляді:

$y_r = e^{\alpha x} (U_s(x) \cos \beta x + V_s(x) \sin \beta x)$ **(3)**

де $U_s(x), V_s(x)$ – многочлени степеня S з невизначеними коефіцієнтами;

Якщо $\alpha \pm \beta$ співпадає з деякими коренями характеристичного рівняння, то y_r шукаємо у вигляді:

$y_r = x^r e^{\alpha x} (U_s(x) \cos \beta x + V_s(x) \sin \beta x)$ **(4)**

Зауваження . Вигляд розв'язку (3) або (4) зберігається і у випадку, коли в правій частині рівняння відсутній доданок, що містить $\cos \beta x$ або $\sin \beta x$.

Якщо функція f(x) не підпадає під вигляд наведених функцій, то якщо це можливо, перетворюють f(x) таким чином, щоб вона представлялась у вигляді суми доданків, кожний з яких представляє один з вказаних виглядів.

<u>Приклад</u>. Розв'язати рівняння:

$$y'' + y = 2 + x^2 + \sin x$$

Маємо $y = y_0 + y_{r1} + y_{r2}$, де y_{r1} відповідає рівнянню з правою частиною $2+x^2$, а y_{r2} відповідає рівнянню з правою частиною 2sin x

Характеристичне рівняння $k^2+1=0$ має корені k=0+i*1, тому:

$$y_0 = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

Знайдемо y_{r1} для рівняння:

$$y_r + y = 2 + x^2 = e^{0x}(2 + x^2), a = 0, n = 2$$

маємо:

$$y_{r1} = x^r \cdot e^{0x} \cdot Q_2(x) + A + Bx + Cx^2, r = крат(0 \pm i) = 0,$$

$$y_{r1} = B + 2Cx, \;\; y_{r1}'' = 2C$$

Після підстановки знаходимо:

$$2C + A + Bx + Cx^2 = 2 + x^2,$$

звідки, порівнюючи коефіцієнти в обох частинах рівняння при x^2, x, x^0 маємо C=1, B=0, A=0, тобто $y_{r1} = x^2$

Знайдемо y_{r2} для рівняння

$$y'' + y = 2\sin x$$

так, як для $r = крат(b_i, k_1, k_2) = крат(i, i, -i) = 1,$ то

$$y_{r2} = x(A\cos x + B\sin x)$$

Визначивши y_{r2}', y_{r2}'' і підставивши їх в вихідне рівняння, маємо: A= -1, B=0, тобто:

$$y_{r2} = -x\cos x$$

маємо:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 - x\cos x$$

ЛЕКЦІЯ 10.

Тема лекції: Системи диференціальних рівнянь

План лекції:

1. Канонічна система диференціальних рівнянь.
2. Нормальна система диференціальних рівнянь.
3. Розв'язки нормальної системи диференціальних рівнянь.
4. Зведення нормальної системи n рівнянь першого порядку до одного рівняння n-го порядку.
5. Лінійна система диференціальних рівнянь.

1. Система k диференціальних рівнянь, яка зв'язує незалежну змінну x і k функцій $y_1(x)$, $y_2(x)$,..., $y_k(x)$, розв'язана відносно старших похідних цих функцій $y_1^{(p1)}(x), y_2^{(p2)}(x),...,y_k^{(pk)}(x)$, називається **канонічною системою диференціальних рівнянь порядку n,** $n=p_1+p_2+\ldots+p_k$

Така система має вигляд:

$$\begin{cases} y_1^{(p1)}(x) = f_1(x_1 y_1,..., y_1^{(p1-1)},..., y_k,..., y_k^{(pk-1)}) \\ y_2^{(p2)}(x) = f_2(x_1 y_1,..., y_1^{(p1-1)},..., y_k,..., y_k^{(pk-1)}) \\ \qquad\qquad\qquad ... \\ y_k^{(pk)}(x) = f_{k1}(x_1 y_1,..., y_1^{(p1-1)},..., y_k,..., y_k^{(pk-1)}) \end{cases}$$

2. Нехай k=n і $p_1=p_2=\ldots=p_n=1$, тобто система рівнянь складається з n диференціальних рівнянь першого порядку.

Система вигляду

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1,..., y_n) \\ y_2'(x) = f_2(x, y_1,..., y_n) \\ \qquad ... \\ y_n'(x) = f_n(x, y_1,..., y_n) \end{cases} \quad \mathbf{(1)}$$

називається **нормальною системою**. Число n називається її **порядком**.

3. Розв'язком системи (1) на інтервалі $a<x<b$ називається сукупність функцій $y_1(x) = \varphi_1(x),...y_2(x) = \varphi_2(x),..., y_n(x) = \varphi_n(x)$, неперервно диференційованих на (a,b) і таких, що перетворюють рівняння системи (1) в тотожності відносно $x \in (a,b)$

Задача Коші для нормальної системи (1) ставиться так: знайти розв'язок системи (1), який задовольняє початкові умови:

$$y_1(x_0) = y_1^0, y_2(x_0) = y_2^0,..., y_n(x_0) = y_n^0,$$

де $y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0$ – задані числа.

<u>Теорема Коші</u>. Якщо в деякій області D функції $f_1, f_2, .., f_n$, що є правими частинами системи неперервні разом з частинними похідними, то для будь-якої точки $M_0(x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)$ існує єдиний розв'язок $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$, який задовольняє початкові умови $y_1(x_0) = y_1^0, y_2(x_0) = y_2^0, ..., y_n(x_0) = y_n^0$.

Загальним розв'язком системи (1) називається така сукупність функцій $y_i = y_i(x, c_1, ..., c_n), i = \overline{1, n}$, що при будь-яких припустимих значеннях $c_1, ..., c_n$ і для будь-яких початкових умов існують такі числа c_i, що функції $y_i = y_i(x, c_1, ..., c_n^0), i = \overline{1, n}$ задовольняють ці умови.

Розв'язки, які отримуються з загального розв'язку при конкретних значеннях $c_1, ..., c_n$, називаються **частинними розв'язками**.

4. Система (1) в багатьох випадках зводиться до одного диференціального рівняння n-го порядку.

На цьому базується **метод виключення** для розв'язання нормальної системи диференціальних рівнянь (1), згідно з яким ця система зводиться до одного диференціального рівняння n-го порядку.

Відбувається це наступним чином:

Перше рівняння з системи (1) диференціюють по x і замість $y_1, y_2, ..., y_n$ підставляють їх вирази з системи (1), одержуючи рівняння:

$$y_1'' = F_2(x_1, y_1, y_2, ..., y_n)$$

Продовжують аналогічні дії до тих пір, поки не одержать рівняння:

$$y_1^{(n)} = F_n(x_1, y_1, y_2, ..., y_n)$$

Потім з одержаних на попередніх етапах рівнянь знаходять $y_1, y_2, ..., y_n$ і підставляють в останнє рівняння.

В результаті одержують рівняння n-го порядку для y_1, тобто:

$$y_1^{(n)} = \Phi(x_1, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}).$$

Розв'язавши його, знаходять функцію :

$$y_i = y_i(x, c_1, ..., c_n)$$

Інші шукані функції знаходять з рівнянь, одержаних на попередніх етапах.

5. Система диференціальних рівнянь називається **лінійною**, якщо вона лінійна відповідно всіх невідомих функцій та їх похідних.

Нормальна лінійна однорідна система n-го порядку має вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + ... + a_{1n}(t)x_n \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + ... + a_{2n}(t)x_n \\ ... \\ \dfrac{dx_{n1}}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + ... + a_{nn}(t)x_n \end{cases} \quad \textbf{(2)}$$

В області неперервності коефіцієнтів $a_{ij}(t)$ i,j=1,n система (2) задовольняє умови теорії існування і єдиності розв'язку задачі Коші.

Фундаментальною системою розв'язків системи (2) називається сукупність n лінійно незалежних розв'язків цієї системи

$$x_k(t) = (x_1^{(k)}(t), x_2^{(k)}(t), ..., x_n^{(k)}(t))^T, k = \overline{1,n}.$$

Загальний розв'язок однорідної системи диференціальних рівнянь представляється у вигляді:

$$x(t) = \sum_{k=1} C_k x_k(t)$$

де $x_k(t), k = \overline{1,n}$ – фундаментальна система розв'язків цієї системи, C_k k=1,n – довільні сталі.

Нормальна лінійна неоднорідна система n-го порядку має вигляд.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + ... + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + ... + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ ... \\ \dfrac{dx_{n1}}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + ... + a_{nn}(t)x_n + + f_n(t) \end{cases}$$

Загальний розв'язок неоднорідної системи диференціальних рівнянь представляється у вигляді

$$x(t) = x_0(t) + x_r(t)$$

де $x_0(t)$ – загальний розв'язок відповідної однорідної системи, $x_r(t)$ – деякий частинний розв'язок заданої неоднорідної системи.

Якщо коефіцієнти $a_{ij}(i, j = \overline{1,n})$ – сталі, то маємо систему лінійних неоднорідних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Для знаходження $x_0(t)$ використовують метод виключення, для знаходження $x_r(t)$ – метод підбору вигляду частинного розв'язку за спеціальним виглядом правої частини.

<u>Приклад</u>: Розв'язати систему:

$$\begin{cases} y' = y + z \\ z' = y - z \end{cases}$$

Маємо: $y'' = y' + z'$. З другого рівняння системи підставимо сюди z'. Тоді:

$y'' = y' + y - z$

З першого рівняння системи підставимо сюди z. Знайдемо:

$y'' - 2y = 0$,

звідки, розв'язуючи маємо:

$y = c_1 e^{x\sqrt{2}} + c_2 e^{-x\sqrt{2}}$

$z = y' - y = (\sqrt{2} - 1)c_1 e^{x\sqrt{2}} - (\sqrt{2} + 1)c_2 e^{-x\sqrt{2}}$

Математичні диктанти.

Тема 1 Диференціальні рівняння: основні поняття і означення ДР 1-го порядку.

1. В1. Диференціальним називається рівняння, яке...
   В2. ДР з частинними похідними є рівняння, яке...
   В3. Звичайним ДР є рівняння, яке ...
   В4. Порядком ДР називається...

2. В1. Інтегральною кривою є ...
   В2. Рівнянням в явній формі називають рівняння, яке...
   В3. Рівнянням в неявній формі називають рівняння. Яке
   В4. Система звичайних ДР є...

3. В1. Загальним розв'язком ДР називається..
   В2. Загальним інтегралом ДР називається...
   В3. Рівняння виду $y' = f(x, y)$ називається...
   В4. Рівняння виду $F(x, y, y') = 0$ називається...

4. В1. Початковою умовою називається умова...
   В2. Загальним розв'язком ДР 1-го порядку називається...
   В3. Частинним розв'язком ДР 1-го порядку називається...
   В4. Задачею Коші називається...

5. В1. Особливими називають точки...
   В2. Особливим розв'язком називають...
   В3. Геометрично загальний розв'язок ДР – це...
   В4. Розв'язати задачу Коші геометрично – значить...

Тема 2. ДР з відокремлюваними змінними. Однорідні ДР.

1. В1. Рівняння виду $N(x)\cdot R(y)dx+M(x)\cdot K(y)dy=0$ називається...

   В2. Рівняння виду $P(x)dx+Q(y)dy=0$ називається...

   В3. Відокремленням змінних називається операція...

   В4. Чи є рівняння $xyy'=1-x^2$ рівнянням з відокремлюваними змінними?

2. В1. Чи є однорідною функція $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$?

   В2. Однорідним відносно змінних x та y називається рівняння...

   В3. Функція $f(x,y)$ називається однорідною n-го порядку відносно x,y , якщо...

   В4. Однорідне рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними за допомогою...

3. Чи є однорідними функції:

В1. $f(x,y)=xy$

В2. $f(x,y)=\dfrac{xy}{y+x}$

В3. $f(x,y)=x^2-y^2-1$

В4. $f(x,y)=\dfrac{x+y}{y}$

4. Розв'язати рівняння:

В1. $xy'=1$

В2. $y'=x+xy$

В3. $yy'=x^3$

В4. $y'=x^4y^2$

Тема 3. Лінійні ДР. Рівняння Бернуллі. Рівняння у повних диференціалах.

1. В1. Лінійним неоднорідним рівнянням називається...
   В2. Лінійним називається рівняння...
   В3. Лінійним однорідним рівнянням називається...
   В4. Канонічною формою запису лінійного рівняння є...

2. В1. Довільність у виборі функції V(x) в підстановці Бернуллі полягає в ..
   В2. Підстановка Бернуллі має вигляд...
   В3. Перше рівняння в системі має вигляд...
   В4. Друге рівняння в системі має вигляд...

3. В1. В методі варіації довільної сталої відбувається заміна...
   В2. Рівняння Бернуллі має вигляд...
   В3. Рівняння Ріккаті має вигляд...
   В4. Рівняння Бернуллі може бути розв'язане...

4. В1. Умова $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ є необхідною і достатньою для того, щоб...
   В2. Рівнянням у повних диференціалах є рівняння...
   В3. Задача інтегрування рівняння у повних диференціалах полягає в ...
   В4. Повним диференціалом називається...

Тема 4. ДР вищих порядків. Рівняння, що допускають зниження порядку.

1. В1. Загальним порядком називається...
   В2. Рівнянням n-го порядку є рівняння ...
   В3. Задачею Коші є...
   В4. Частинним розв'язком називається...

2. В1. Рівняння виду $F\left(y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0$ розв'язується...
   В2. Рівняння виду $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0$ розв'язується...
   В3. Рівняння виду $F(x, y^{(n)}) = 0$ розв'язується...
   В4. Рівняння виду $y^{(n)} = f(x)$ розв'язується...

3. Розв'язати рівняння:

   В1. $y'' = x + \sin x$

   В2. $y^{iv} = \frac{1}{x}$

B3. $y'' = xe^x$

B4. $y''' = \dfrac{\ln x}{x^2}$

Тема 5. Лінійні ДР вищих порядків.

1. B1. Зведеним лінійним рівнянням ДР порядку n називається рівняння...

   B2. Однорідним лінійним ДР порядку n називається рівняння...

   B3. Лінійним диференціальним оператором від функції y називається ...

   B4. Лінійним ДР n-го порядку називається...

2. B1. Лінійним неоднорідним ДР n-го порядку називається...

   B2. Система функцій $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ називається лінійно незалежною, якщо...

   B3. Якщо y_1 і y_2 – частинні розв'язки лінійного рівняння, то які їх комбінації також є розв'язками?

   B4. Система функцій $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ називається лінійно незалежною якщо...

3. B1. Визначником Вроньського називається...

   B2. Якщо функції $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ лінійно незалежні, то визначник Вроньського...

   B3. Якщо для двох функцій y_1 і y_2: $\dfrac{y_1}{y_2} \neq const$, то...

   B4. Якщо для двох функцій y_1 і y_2: $\dfrac{y_1}{y_2} = const$, то...

4. B1. Фундаментальною системою розв'язків називається...

   B2. Скільки незалежних частинних розв'язків може мати лінійне однорідне ДР?

   B3. Загальний розв'язок однорідного ДР через його частинні розв'язки запишеться так...

   B4. Як визначити всі інші розв'язки лінійного однорідного ДР. якщо відомі його лінійно-незалежні розв'язки.

Тема 6. Лінійно-однорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами.

1. В1. Характеристичним є рівняння...

   В2. якщо корені k_1 і k_2 – дійсні і рівні, то загальний розв’язок має вигляд:…

   В3. якщо корені k_1 і k_2 – дійсні і різні, то загальний розв’язок має вигляд:…

   В4. якщо корені k_1 і k_2 –комплексні спряжені, то загальний розв’язок має вигляд:…

2. В1. Лінійне однорідне рівняння n-го порядку має вигляд...

   В2. Лінійне однорідне рівняння 2-го порядку має вигляд...

   В3. Характеристичним рівнянням для рівняння n-го порядку є рівняння...

   В4. Якщо корінь x має кратність, то йому відповідають такі розв’язки...

3. Розв’язати рівняння

   В1. $y'' - 2y' + 2y = 0$

   В2. $y'' + 6y' + 25y = 0$

   В3. $y'' + 2y' + y = 0$

   В4. $y'' + 4y' = 0$

4. Розв’язати рівняння

   В1. $4y^{iv} + 3y''' = 0$

   В2. $y''' - y'' - y' + y = 0$

   В3. $y''' + 3y'' + 2y' = 0$

   В4. $y''' - 13y'' + 12y' = 0$

<u>Тема 7.</u> Неоднорідні ДР 2-го порядку. Неоднорідні ДР 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

1. В1. Лінійне неоднорідне ДР 2-го порядку має вигляд...
   В2. Лінійне неоднорідне ДР 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами має вигляд...

   В3. Загальний розв'язок неоднорідного ДР має вигляд...
   В4. Якщо $f(x)+f_1(x)+f_2(x)$, то загальний розв'язок неоднорідного ДР має вигляд:...
2. Якщо в лінійному неоднорідному ДР зі сталими коефіцієнтами права частина має вигляд:..., то як запишеться частинний розв'язок?

В1. $f(x)=e^{\alpha x}(Q_{s1}(x)\cos\beta x+P_{s2}(x)\sin\beta x)$,

де $\alpha\pm\beta$ не є коренями характеристичного рівняння.

В2. $f(x)=e^{\alpha x}(Q_{s1}(x)\cos\beta x+P_{s2}(x)\sin\beta x)$

де $\alpha\pm\beta$ є коренями характеристичного рівняння

В3. $f(x)=e^{\alpha x}(Q_{s1}(x)\cos\beta x+P_{s2}(x)\sin\beta x)$

де α не є коренем

В4. $f(x)=e^{\alpha x}(Q_{s1}(x)\cos\beta x+P_{s2}(x)\sin\beta x)$

де α – корінь

3. Записати y_r для рівняння:

   В1. $y''-2y'=2e^{x}$
   В2. $y''-9y=e^{3x}\cos x$
   В3. $y''-6y'+25y=2\sin x+3\cos x$
   В4. $y''-4y'+20y=16xe^{2x}$

4. Записати y_r для рівняння:

   В1. $y''-4y'+20y=16xe^{2x}$
   В2. $y''-2y'+37y=36e^{x}\cos 6x$
   В3. $y''-9y'+18y=26\cos x-4\sin x$
   В4. $y''+y=x^3-4x^2+7x-10$

Список використаної та рекомендованої літератури

1. Клепко В.Ю., Голець В.Л. Вища математика в прикладах і задачах: Навчальний посібник. 2-ге вид. Київ.: Центр учбової літератури, 2009. 594 с.

2. Вища математика. Практикум/ В.Г. Кривуца, В.В. Барковський, Н.В. Барковська. Київ.: ЦУЛ, 2003. 536с.

3. Овчинников П.Ф., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика. Підручник у 2 ч. Ч.1. Лінійна та векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення. – Київ.: Техніка, 2007. 600 с.

4. Овчинников П.Ф., Михайленко В.М. Вища математика. Підручник у 2 ч. Ч.2. Диференціальні рівняння. Операційне числення. Ряди та їх застосування. Стійкість за Ляпуновим. Рівняння з математичної фізики. Оптимізація і керування. Теорія ймовірностей. Числові методи. Київ.: Техніка, 2004. 792 с.

5. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика. Підручник для студ. вищ. пед. навч. закл. Київ.: Либідь, 2010. 592 с.

6. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика. Підручник для студ. вищ. пед. навч. закл. Київ.: Либідь, 2010. 496 с.

7. Вища математика. Основні розділи: У 2 кн. Кн. 1: Підручник для природ. спец. ун-тів і вищих техн. навч. закладів/ Г.Й. Призва [та інші]; за ред. Г.Л. Кулініч. Київ: Либідь, 1995. 371 с.

8. Вища математика для майбутніх інженерів: навч. посібник/ К.В. Власенко; за ред. проф. О.І. Скафи. Донецьк: Ноулідж, 2010. 430 с.

9. Коваленко І.П. Вища математика. Навч. посіб. Київ.: Вища школа, 2006. 343 с.

10. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. Навч. посіб. Київ.: А.С.К., 2006. 648 с.

11. Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю., Михалін Г.О. Вища математика: Приклади і задачі/ Посібник. Київ: ВЦ «Академія», 2003. 624 с.